



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 30 juin 2017 par :

DAMIEN BOULOC

Géométrie et topologie de systèmes dynamiques intégrables

JURY

ALEXEY BOLSINOV	Loughborough University	Rapporteur
LUBOMIR GAVRILOV	Université de Toulouse	Membre du jury
EVA MIRANDA	Universitat Politècnica Catalunya	Rapporteur
PHILIPPE MONNIER	Université de Toulouse	Directeur de thèse
TUDOR RATIU	Shanghai Jiao Tong University	Rapporteur
NGUYEN TIEN ZUNG	Université de Toulouse	Directeur de thèse
SAN VŨ NGỌC	Université de Rennes	Membre du jury

École doctorale et spécialité :

MITT : Domaine Mathématiques : Mathématiques fondamentales

Unité de Recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse (UMR 5219)

Directeur(s) de Thèse :

Nguyen Tien Zung et Philippe Monnier

Rapporteurs :

Alexey Bolsinov, Eva Miranda et Tudor Ratiu

Remerciements

J'aimerais commencer cette thèse par des remerciements. Déjà, parce que c'est la coutume, et que ces quelques pages seront pour beaucoup la seule partie qu'ils liront de ce manuscrit (et on peut les comprendre!). Mais surtout parce qu'il y a effectivement beaucoup de personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse, parfois sans le savoir, de par leur soutien, leurs encouragements ou tout simplement leur présence, et je veux pour cela les remercier.

Je veux tout d'abord remercier mes directeurs de thèse, Nguyen Tien Zung et Philippe Monnier, pour leur confiance et leur patience. Cette thèse n'aurait pas abouti s'ils ne m'avaient pas guidé, aidé à me sortir des impasses que j'ai pu rencontrer, et rassuré quand il le fallait. Zung, merci de m'avoir fait profiter de ta vision des mathématiques, de m'avoir dirigé vers des problèmes que j'ai pris plaisir à étudier, et merci aussi pour ta bonne humeur permanente. Philippe, merci pour ta disponibilité, merci d'avoir répondu à mes questions parfois assez techniques, et merci pour tes précieux conseils. Nos discussions, qu'elles soient d'ordre mathématique ou personnel, ont toujours été très profitables.

J'aimerais aussi remercier Alexey Bolsinov, Eva Miranda et Tudor Ratiu d'avoir bien voulu être rapporteurs de cette thèse, ainsi que Lubomir Gavrilov et San Vĩ Ngọc qui ont accepté de faire partie du jury. En particulier, je voudrais remercier une fois de plus Eva pour tout le temps qu'elle m'a consacré sans y être aucunement obligée. Merci Eva pour ton implication, ton écoute et ton attention. Merci à toi ainsi qu'à Amadeu, Arnau, Cedric et Roisin pour votre accueil chaleureux au *b-lab*, où un chapitre de cette thèse a été sauvé de justesse.

Évidemment, je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui m'ont entouré à Toulouse. Je pense en premier à Anne et Laura qui, depuis notre M2 jusqu'à l'aboutissement de nos thèses respectives, ont partagé cette aventure avec moi, rendant les mauvais moments moins pénibles, et les bons moments encore meilleurs. Merci à toutes les deux pour absolument tout : pour vos conseils, pour ces moments de pause bénéfiques, pour avoir contribué à faire du labo un endroit où il fait bon venir travailler, pour toutes les sorties et autres occasions de décompresser un peu (« Promis, on rentre tôt ... »), et pour encore un bon nombre d'autres raisons que je n'ai pas la place d'énumérer ici. Merci aussi à tous les doctorants qui sont passés par le bureau 106 : merci à Anton, Sergio, Jian et Matthieu, les uns pour avoir apporté la bonne humeur, les autres pour leur patience dans ce bureau

parfois un peu bruyant ou animé. Avec une attention particulière pour le meilleur des cobureaux, Anton, qui sera resté du début à la fin, et croyez bien qu'en trois ans il s'en est passées des choses absurdes dans ce bureau (et en dehors). Merci également à tous les autres doctorants et post-doc de l'équipe, notamment pour la bonne ambiance qui y régnait à travers les pique-niques, sorties, exposés au séminaire Picard et fêtes d'anniversaire. Je pense à Andre, Daniel, Danny, Ðat, Fabrizio (dont les marches aléatoires aboutissaient parfois dans le bureau 106), Giulio, Guillem (toujours là si vous avez besoin d'une énigme ou d'un exercice de topologie), Ibrahim, Jade, Jinan, Jordi, Jorge, Jules, Julie (et notre passion commune du double sens qui nous a valu bien des fous rires), Jinan, Kévin (reparti trop tôt dans son faux pays d'origine), Leyth, Paul, Sara (repartie trop tôt dans son vrai pays d'origine), Samuel, Susanna et Zak, ainsi qu'à nos visiteurs temporaires Auðunn, Fred et Jan. Merci aussi aux membres permanents du laboratoire. En particulier merci à Arnaud, qui a le don pour illustrer les curiosités mathématiques de manière concrète et souvent ludique, et à Joan qui fait de très bons cours et de très bons gâteaux. Merci aussi à Lionel pour avoir fait confiance à des doctorants et pour le travail de titan qu'il a accompli, et merci à lui ainsi qu'à Jean-François pour leurs précieux conseils, leurs encouragements, et toutes les opportunités qu'ils m'ont offertes. Merci aussi aux secrétaires qui œuvrent au bon fonctionnement de l'université, notamment Jocelyne qui a toujours été d'une très grande patience même pour des ordres de missions parfois laborieux, Agnès et Martine de l'école doctorale qui sont toujours très accueillantes et arrangeantes, et Sylvie qui se soucie de ses étudiants sans jamais compter les heures, toujours à l'écoute, y compris et surtout dans les moments les plus difficiles.

Merci aussi à tous les potes d'avoir toujours été là, tout simplement. Merci encore à Anne et Laura, merci aussi à Maxime (alias Maxou, Chaton, et autres noms d'animaux plus ou moins mignons), Coton (qui s'appelle en fait Hugo), JP (qui s'appelle en fait Guillaume). Merci à Sylvain et Cyprien, que l'impitoyable réalité du métier d'enseignant a forcés à s'exiler, au moins temporairement, vers la capitale. Merci encore à Théo, pour beaucoup de discussions tantôt philosophico-mathématiques, tantôt humoristico-absurdes, parfois même les deux à la fois. Merci à Phifou, Quentin, Théodore et François pour beaucoup de soirées de décompression, en ville comme sur le campus, et merci aux gars de la *broteam* de m'avoir fait une place dans la meilleure équipe de la saison, autant sur le niveau que sur l'ambiance.

Et enfin (le meilleur pour la fin), merci à toute ma famille qui a toujours été là pour moi, sans jamais me reprocher le temps passé à travailler, même certains week-ends et vacances, sur des choses que j'étais incapable de leur expliquer. Merci à mes parents, pour tout ce qu'ils ont toujours fait pour leurs enfants, et notamment pour m'avoir toujours soutenu dans mes études. Merci à Léa, la meilleure des petites

sœurs, qui fait le plus beau métier du monde et que j'admire. Merci à Delphine et Jérôme pour le plus beau cadeau qu'ils aient pu me faire au début de ma thèse : ma nièce Anaïa, débordante d'énergie et d'affection, et meilleur remède qui soit contre n'importe quel coup de fatigue. Merci à vous tous pour ces moments en famille réguliers, aussi appréciables que nécessaires.

Table des matières

Introduction	11
1. Préliminaires	17
1.1. Rappels de géométrie symplectique	17
1.1.1. Définitions et modèle local	17
1.1.2. Sous-variétés isotropes et lagrangiennes	19
1.1.3. Champs de vecteurs hamiltoniens et crochet de Poisson . . .	20
1.2. Systèmes dynamiques intégrables	22
1.2.1. Systèmes hamiltoniens intégrables	22
1.2.2. Systèmes non-hamiltoniens intégrables	24
1.3. Actions de groupe et variétés quotient	31
1.3.1. Cas d'un quotient lisse	31
1.3.2. Quotients non-lisses et orbispaces	35
 I. Fibres singulières de systèmes Hamiltoniens intégrables	 41
2. Systèmes de pliage sur les espaces de polygones 3D	43
2.1. Géométrie des polygones dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3	43
2.1.1. Définitions et notations	43
2.1.2. Coordonnées action–angle sur un ouvert dense	50
2.1.3. Extension au cas non-générique	52
2.2. Structure des fibres singulières	54
2.2.1. Étude de la fibre relevée	54
2.2.2. Fibres dans l'espace de configuration	60
2.3. Isotropie des fibres du système	62
2.3.1. Générateurs de l'espace tangent	62
2.3.2. Cas des fibres prodigues	64
2.3.3. Cas général	67
 3. Le système de Gelfand–Cetlin sur les orbites coadjointes de $U(n)$	 73
3.1. Définition du système	73
3.1.1. Orbites coadjointes sur $\mathfrak{u}(n)^*$	73
3.1.2. Le système de Gelfand–Cetlin	76

3.2.	Interprétation géométrique des fibres	79
3.2.1.	Variétés de drapeaux partiels et complets	79
3.2.2.	Ellipsoïdes complexes	80
3.3.	Géométrie des drapeaux d'ellipsoïdes de valeurs propres fixées . . .	86
3.3.1.	Groupe de symétrie d'un drapeau d'ellipsoïde	86
3.3.2.	Image directe d'un drapeau d'ellipsoïdes	91
3.4.	Exemples de fibres	99
3.4.1.	Fibre régulière sur une orbite générique	99
3.4.2.	Singularité sphérique sur une orbite générique de $\mathfrak{u}(3)^*$. . .	100
4.	Systèmes sur la variété grassmannienne des 2-plans dans \mathbb{C}^n	107
4.1.	Définitions et notations	107
4.1.1.	La variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$	107
4.1.2.	Système intégrable sur $\text{Gr}(2, n)$	110
4.2.	Lien avec les systèmes précédents	112
4.2.1.	Avec le système de pliage de polygones	112
4.2.2.	Avec le système de Gelfand–Cetlin	117
4.3.	Structure de variété sur les fibres	120
4.4.	Perspectives	123
II.	Topologie des systèmes intégrables non-Hamiltoniens	125
5.	Actions totalement hyperboliques de \mathbb{R}^n sur des n-variétés	127
5.1.	Points fixes de l'action et théorie de Morse	127
5.1.1.	Flot engendré par un vecteur générique	128
5.1.2.	Notion d'indice pour les points fixes	129
5.1.3.	Preuve du théorème principal	132
5.2.	Nombre de domaines hyperboliques	141
5.2.1.	Flot générique et nombre de domaines hyperboliques	141
5.2.2.	Modification du nombre de domaines hyperboliques	143
5.2.3.	Cas des surfaces fermées	145
5.3.	Actions totalement hyperboliques sur la sphère de dimension 2 . . .	148
5.4.	Exemples d'actions totalement hyperboliques en dimension 3 . . .	154
5.4.1.	Sur la sphère S^3	154
5.4.2.	Sur l'espace projectif \mathbb{RP}^3	156
Bibliographie		159

Table des figures

1.1.	Exemples d'actions hyperboliques sur les surfaces fermées	32
2.1.	Découpage d'un polygone singulier le long d'une face dégénérée . . .	55
2.2.	Interprétation des différents types de composantes d'une fibre du système de pliage	59
2.3.	Approximation d'un polygone possédant une face dégénérée	65
2.4.	Approximation d'un polygone non prodigue	67
2.5.	Image de l'application moment singulière pour le système de pliage de pentagones réguliers.	71
2.6.	Fibres singulières du système de pliage de pentagones réguliers . . .	72
3.1.	Le diagramme de Gelfand–Cetlin résumant les inégalités satisfaites par les fonctions valeur propre $\gamma_{i,j}$	77
3.2.	Obstruction à une correspondance naturelle entre les fibres $F_\lambda^{-1}(c) \subset \mathcal{H}(n)$ et $\Gamma_\lambda^{-1}(c) \subset \mathcal{F}$	85
3.3.	Lien entre le système de Gelfand–Cetlin F_λ et l'application Γ_λ . . .	85
3.4.	Un drapeau complet dans \mathbb{C}^3 correspondant à une singularité sphérique sur orbite générique de $\mathfrak{u}(3)^*$	103
4.1.	Diagramme pour le système de Gelfand–Cetlin sur $\mathfrak{u}(n)^*$ associé à la configuration en chenille dans un polygone à n côtés.	119
5.1.	Dynamique du flot engendré par un vecteur générique sur un domaine hyperbolique en dimension 2.	129
5.2.	Connexion des fonctions f_i et f_j le long de l'orbite $\mathcal{O}_{i,j}^{(1)}$	134
5.3.	Restriction de U_i à W_i en dimension 2.	135
5.4.	Décompositions en puzzle de la sphère S^2 pour différents vecteurs génériques d'une même action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2	143
5.5.	Ajout de deux sphères concentriques autour d'un point fixe.	144
5.6.	Décomposition d'une surface non-orientable en 8 domaines hyperboliques.	147
5.7.	Domaines hyperboliques dans une composante connexe de $S^2 \setminus L_k$. .	149
5.8.	Domaines hyperboliques sur un œil entre deux courbes.	150
5.9.	Paire de points séparée par trois lacets $L_{k_1}, L_{k_2}, L_{k_3}$	153

5.10. Décomposition de S^3 en domaines hyperboliques et éventail compatible.	155
--	-----

Introduction

En mathématiques, la notion d'*intégrabilité* d'un système dynamique peut faire référence à plusieurs concepts, issus d'un même principe général, mais dont la définition précise dépend de la nature du système considéré. Dans cette thèse, on s'intéresse indépendamment à deux de ces aspects. Dans une première partie, il est question d'intégrabilité *à la Liouville* pour les systèmes hamiltoniens en géométrie symplectique, et on s'intéresse plus particulièrement aux fibres singulières de quelques systèmes hamiltoniens bien particuliers. Dans la seconde partie, on utilise une définition un peu plus générale d'intégrabilité pour les systèmes dits *non-hamiltoniens* sur des variétés quelconques, et on étudie la topologie globale de systèmes intégrables en ce sens.

Systèmes hamiltoniens intégrables et leurs singularités

On attribue souvent à Newton la naissance de la *mécanique classique*, consacrée à l'étude des lois physiques régissant le mouvement d'un corps lorsqu'on le soumet à diverses forces. En effet, bien que postérieures à des travaux tels que ceux de Kepler sur les trajectoires des planètes, les lois du mouvement énoncées par Newton ont permis par la suite une étude systématique d'un grand nombre de systèmes physiques. En particulier, la deuxième de ces lois, parfois appelé *principe fondamental de la dynamique*, permet de mettre mathématiquement en équation l'évolution d'un système sous la célèbre forme :

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{0.1}$$

où \vec{F} désigne la résultante des forces appliquées à un corps de masse m , et \vec{a} l'accélération de ce corps, c'est-à-dire la dérivée seconde de sa position par rapport à la variable de temps t . Déjà utile en l'état, l'équation (0.1) a été ensuite sujette à plusieurs reformulations mathématiques permettant de traiter à chaque fois un nombre plus grand de systèmes physiques. La mécanique hamiltonienne est l'une de ces reformulations. Après avoir introduit, en plus de la variable de position q , une variable de *moment conjugué* p , les équations de Newton deviennent un

système d'équations différentielles, dit *système Hamiltonien*, de la forme

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \end{cases} \quad (0.2)$$

où $H : (q, p) \mapsto H(q, p)$ est une fonction appelée *hamiltonien* du système¹, qui en général peut s'interpréter physiquement comme l'énergie totale du système considéré. En particulier, cette fonction H est nécessairement constante le long des solutions $t \mapsto (q(t), p(t))$: c'est le principe de conservation de l'énergie. On peut alors chercher d'autres fonctions constantes le long des solutions, appelées *intégrales premières du mouvement* (ou seulement *intégrales premières*). L'intérêt de ces fonctions apparaît dans le théorème de Liouville [Lio55] : dans le cas d'un système à n degrés de liberté (c'est-à-dire lorsque q appartient à \mathbb{R}^n , ou plus généralement à une variété de dimension n), si on trouve n intégrales premières $f_1 = H, f_2, \dots, f_n$ fonctionnellement indépendantes « presque partout », alors on pourra les utiliser pour déterminer localement les solutions du système par des opérations d'intégrations, éliminations et dérivations partielles, pourvu que ces intégrales premières commutent entre elles pour le *crochet de Poisson* défini par

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}.$$

Dans ce cas on dit que le système est *intégrable à la Liouville*.

Les définitions de système hamiltonien et de son intégrabilité s'étendent naturellement à toute variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$, puisque la forme symplectique ω induit un crochet de Poisson $\{\cdot, \cdot\}$ sur l'ensemble des fonctions différentiables sur M , qui dans le cas $M = \mathbb{R}^{2n}$ coïncide avec celui défini ci-dessus. On appellera ainsi plus généralement *système hamiltonien intégrable* sur (M, ω) toute collection de n fonctions f_1, \dots, f_n fonctionnellement indépendantes presque partout, et commutant deux à deux pour le crochet de Poisson sur M . On peut alors s'intéresser aux niveaux de la fonction

$$F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

appelée *application moment* du système. En effet, on sait par exemple que les solutions du système d'équations différentielles défini par $H = f_1$ et les équations (0.2) sont contraintes à rester sur ces niveaux. Un résultat fondamental à ce sujet est le théorème d'Arnold–Liouville–Mineur [Arn89, Min35, Min36, Min37], qui

¹On se place ici dans le cas où le hamiltonien est indépendant du temps.

affirme que presque tous les niveaux de l'application moment sont des tores de dimension n (c'est-à-dire des produits cartésiens de n cercles). Pour comprendre la géométrie globale du système, reste à étudier son comportement au voisinage des autres fibres, dites *singulières*. Dans le cas d'un système hamiltonien issu d'un problème physique concret de la mécanique classique, ces singularités sont particulièrement intéressantes puisqu'elles correspondent à un mouvement atypique du système pour des valeurs d'énergie bien particulières. Dans le cas général, l'étude des fibres singulières n'est pas moins intéressante puisqu'elle permet de savoir en quoi la fibration de la variété ambiante M par les niveaux de l'application moment est différente de la fibration triviale. Ces arguments justifient que de nombreux articles soient parus au sujet des singularités de systèmes hamiltoniens (par exemple [BD15, Bol91, Eli90, Fom91, Izo16, LU98, MZ04, PVN14, Zun96] pour n'en citer que quelques-uns).

Dans la première partie de cette thèse, on étudie les fibres singulières de trois familles de systèmes hamiltoniens intégrables. Ces systèmes hamiltoniens sont purement « mathématiques », dans le sens où ils ne sont pas issus de la modélisation d'un problème physique réel via le formalisme hamiltonien. De plus, ce sont des systèmes assez singuliers du fait qu'ils présentent des singularités ne satisfaisant pas les conditions de non-dégénérescence naturelles de la théorie des systèmes intégrables [Vey78, Eli90].

1. Dans le chapitre 2, on étudie une famille de systèmes hamiltoniens intégrables introduit par Kapovich et Millson [KM96] sur l'ensemble des polygones dont le nombre de côtés et leurs longueurs sont fixés. L'ensemble de ces polygones modulo isométries est (pour des valeurs génériques des paramètres fixés) une variété que l'on peut munir naturellement d'une structure symplectique. Ces systèmes s'interprètent géométriquement en termes de pliages des polygones le long de certaines diagonales choisies.
2. Toute orbite coadjointe d'un groupe de Lie possède une structure symplectique. Dans le chapitre 3, on étudie un système intégrable sur les orbites coadjointes du groupe $U(n)$ des matrices unitaires de taille n . Une orbite coadjointe étant identifiée avec l'ensemble des matrices hermitiennes de spectre donné, on peut définir ce système en prenant comme intégrales premières des fonctions qui à une matrice hermitienne associent les valeurs propres de certaines de ses sous-matrices. C'est le système de Gelfand–Cetlin classique introduit par Guillemin et Sternberg [GS83a, GS83b], dont les fibres singulières ont été étudiées par Alamiddine [Ala09] dans le cas particulier $n = 3$.
3. Enfin dans le chapitre 4, on s'intéresse à une famille de systèmes hamiltoniens intégrables définie par Nohara et Ueda [NU14] sur la variété grassmannienne

des plans vectoriels de \mathbb{C}^n . Chacun de ces systèmes dépend d'un choix de diagonales, comme pour la famille des systèmes de pliage.

Les résultats principaux de chacun de ces chapitres peuvent se résumer en l'énoncé suivant :

Théorème 0.3. *Dans chacune des trois familles de systèmes mentionnées ci-dessus, les fibres singulières de l'application moment sont des sous-variétés plongées, chacune difféomorphe à une variété quotient que l'on est capable de décrire explicitement.*

Topologie des systèmes non-hamiltoniens intégrables

Le formalisme hamiltonien décrit précédemment, bien que déjà très efficace, ne permet pas de décrire certains systèmes physiques pourtant naturels. C'est le cas lorsque des phénomènes d'irréversibilité entrent en jeu (friction, viscosité, dissipation, etc). On parle alors de systèmes *non-hamiltoniens*, c'est-à-dire des systèmes dont l'évolution peut être modélisée par le flot d'un champ de vecteurs X sur une variété M , mais tels que X ne soit pas un champ de vecteurs hamiltonien, c'est-à-dire de la forme² $X = \{H, \cdot\}$ avec H une fonction lisse sur M et $\{\cdot, \cdot\}$ un crochet de Poisson issu d'une structure symplectique ω sur M . Mathématiquement, le fait que X ne soit pas hamiltonien peut provenir par exemple du fait que son flot ne préserve pas de forme symplectique sur M , ou même tout simplement du fait qu'il n'existe pas de structure symplectique sur M (par exemple si M est de dimension impaire). Pourtant, on peut donner un sens à l'intégrabilité d'un tel système, qui généralise la notion d'intégrabilité dans le cas hamiltonien. On dira que le système non-hamiltonien modélisé par un champ de vecteurs X sur une variété M est *intégrable* s'il existe p champs de vecteurs $X_1 = X, X_2, \dots, X_p$ commutant deux à deux pour le crochet de Lie et q fonctions f_1, \dots, f_q qui sont chacune une intégrale première de tous les champs de vecteurs X_i , avec $p + q = \dim M$. Les systèmes non-hamiltoniens ont eux aussi été étudiés sous divers points de vue [AZ10, BRGD84, CD01, FJ06, Sto00]. Comme dans le cas hamiltonien, il est particulièrement utile de s'intéresser aux singularités de ces systèmes, et la notion de singularité non-dégénérée a été étendue aux systèmes non-hamiltoniens. En particulier Minh et Zung [ZM14] ont réalisé une étude poussée des systèmes non-hamiltoniens dont toutes les singularités sont non-dégénérées, dans le cas de $p = n$ champs de vecteurs et $q = 0$ fonctions. Cette dernière restriction n'enlève rien à la généralité de l'étude, puisqu'un système de degré (p, q) quelconque peut être étudié séparément sur chaque sous-variété de la forme $\{f_1 = \text{cste}_1, \dots, f_q = \text{cste}_q\}$ où il définit un sous-système de degré $(p, 0)$. Remarquons que l'étude d'un système

²On identifie ici le champ de vecteurs X avec son action par dérivation sur les fonctions sur M .

de degré $(n, 0)$ sur une variété compacte M n'est rien d'autre que l'étude d'une action de \mathbb{R}^n sur M , à savoir celle définie par les flots des champs de vecteurs X_1, \dots, X_n . Si certains de ces flots sont périodiques, cette action descend en une action de $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sur la variété M . Quand ça n'est pas le cas, on dit que l'action est *totalelement hyperbolique*. Dans la seconde partie de cette thèse, on se restreint à l'étude des actions (non-dégénérées) totalement hyperboliques de \mathbb{R}^n sur une variété compacte de dimension n . Ces dernières sont uniquement déterminées (à difféomorphisme près) par l'agencement de leurs orbites le long de M et la donnée d'un drapeau de vecteurs compatible dans \mathbb{R}^n . Étant donnée une action totalement hyperbolique, on s'intéresse en particulier au flot complet $(\varphi_w^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur M généré par l'action d'un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$. On développe une notion d'indice pour les points singuliers de ces flots, correspondant simplement au nombre de directions attractives au voisinage de ces points, et on montre que cette notion peut être mise en relation avec la théorie des fonctions de Morse [Mil63] :

Théorème 0.4. *Soit ρ une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^n sur une variété M compacte et connexe de dimension n . Pour presque tout $w \in \mathbb{R}^n$ et sous quelques conditions, il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les points singuliers sont exactement les points singuliers du flot $(\varphi_w^t)_{t \in \mathbb{R}}$ engendré par w , avec les mêmes indices.*

De plus on donne quelques résultats sur la combinatoire de ces orbites, en particulier le nombre d'orbites de dimension n , qu'on appelle *domaines hyperboliques* :

Théorème 0.5. *Soit ρ une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^n sur une variété M compacte et connexe de dimension n . Alors :*

- ρ possède $d = 2^n c_0$ domaines hyperboliques, où c_0 est le nombre de points attractifs (ou répulsifs) d'un flot $(\varphi_w^t)_{t \in \mathbb{R}}$ générique,
- pour tout $k \geq 0$ il existe une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^n sur M avec $d + 2^{n+1}k$ domaines hyperboliques.

En particulier en dimension 2, pour tout $k \geq 1$,

- la sphère S^2 admet une action totalement hyperbolique avec $8k$ domaines hyperboliques,
- tout autre surface fermée admet une action totalement hyperbolique avec $4k$ domaines hyperboliques.

On donne également quelques conditions combinatoires supplémentaires satisfaites par le graphe sur la sphère S^2 dessiné par les orbites d'une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2 sur cette dernière. Enfin, on donne des exemples explicites d'actions totalement hyperboliques en dimension 3, sur la sphère S^3 et l'espace projectif \mathbb{RP}^3 .

1. Préliminaires

Cette section rappelle de manière synthétique différentes notions utilisées dans cette thèse, autour notamment de la géométrie symplectique, des systèmes intégrables et des actions de groupes. Ces théories ne sauraient être résumées en ces quelques pages. On se contente ici de donner les définitions et d'énoncer, sans les démontrer, les résultats utilisés dans les chapitres suivants. Pour plus de détails, on pourra se référer à des ouvrages tels que [Aud12, BBT03, BF04, BMRZ16, CB15, CDS01, FK14], ainsi que [Pfl01, Pfl03] pour la partie concernant les orbispaces symplectiques.

1.1. Rappels de géométrie symplectique

Soit M une variété lisse de dimension $2n$. On supposera le lecteur familier avec les notions de variété lisse et de ses tenseurs associés (champs de vecteurs et formes différentielles), en renvoyant si besoin aux ouvrages mentionnés précédemment.

1.1.1. Définitions et modèle local

Commençons par rappeler la définition d'une variété symplectique.

Définition 1.1.1. Une *structure symplectique* sur M est une 2-forme $\omega \in \Omega^2(M)$ sur M satisfaisant les propriétés suivantes :

(1.1.1.a) ω est non-dégénérée sur M : en tout point $x \in M$, et pour tout $X \in T_x M$, on a

$$(\forall Y \in T_x M, \omega_x(X, Y) = 0) \iff X = 0,$$

(1.1.1.b) ω est fermée, c'est-à-dire que $d\omega = 0$.

On appellera alors *variété symplectique* la paire (M, ω) .

Une conséquence immédiate de cette définition, et plus particulièrement de la condition (1.1.1.a), est que si (M, ω) est une variété symplectique, alors M est nécessairement de dimension paire. Dans toute cette section on posera $\dim M = 2n$.

Exemple 1.1.2. Donnons quelques exemples classiques de variétés symplectiques.

(1.1.2.a) **Modèle canonique.** L'exemple le plus simple de variété symplectique est \mathbb{R}^{2n} , avec coordonnées $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, muni de la forme symplectique dite *canonique*

$$\omega_{\text{can}} = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

(1.1.2.b) **Modèle complexe.** Considérons \mathbb{C}^n , avec coordonnées (complexes) (z_1, \dots, z_n) , muni de la forme symplectique

$$\omega = \frac{i}{2}(dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{z}_n).$$

Ce modèle n'est rien d'autre que le modèle canonique précédent, on passe de l'un à l'autre via l'identification naturelle $z_i = x_i + iy_i$.

(1.1.2.c) **Fibré cotangent.** Soit N une variété de dimension n , et $\pi : T^*N \rightarrow N$ son fibré cotangent. La variété $M = T^*N$ est muni d'une 1-forme $\theta \in \Omega^1(M)$, appelée 1-forme *tautologique*, définie comme suit. Pour tout $(q, \alpha) \in M = T^*N$ (c'est-à-dire $q \in N$ et $\alpha \in T_q^*N$), pour tout $v \in T_{(q, \alpha)}M$, on pose

$$\theta_{(q, \alpha)}(v) = \alpha(d\pi_{(q, \alpha)}(v))$$

où $d\pi_{(q, \alpha)} : T_{(q, \alpha)}M \rightarrow T_qN$ est la différentielle de π au point (q, α) . Alors la 2-forme

$$\omega = -d\alpha \in \Omega^2(M)$$

est une forme symplectique sur M .

Si (q_1, \dots, q_n) est un système de coordonnées locales sur N , et $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ le système de coordonnées locales naturellement associé sur $M = T^*N$, alors on peut écrire localement

$$\alpha = p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n, \quad \omega = dq_1 \wedge dp_1 + \dots + dq_n \wedge dp_n.$$

Pour $N = \mathbb{R}^n$ on retrouve le modèle canonique (1.1.2.a). ■

Un morphisme d'une variété symplectique (M_1, ω_1) vers une variété symplectique (M_2, ω_2) , encore appelé *symplectomorphisme*, est une application différentiable $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ préservant les structures symplectiques, c'est-à-dire telle que $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$. Le théorème de Darboux suivant montre que localement, toutes les variétés symplectiques sont isomorphes au modèle canonique (1.1.2.a). En particulier, il n'existe pas d'invariant local permettant de distinguer deux variétés symplectiques de même dimension.

Théorème 1.1.3 Darboux [Dar82]. *Soit (M, ω) une variété symplectique. Pour tout point $p \in M$, il existe un voisinage U de p dans M , un voisinage V de 0 dans*

\mathbb{R}^{2n} , et un isomorphisme $\varphi : (M, \omega) \rightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega_{\text{can}})$ tels que

$$\varphi(p) = 0, \quad \varphi^* \omega_{\text{can}} = \omega.$$

Autrement dit, il existe un système de coordonnées locales $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrées en p sur M dans lequel la forme symplectique ω s'écrit

$$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n.$$

On les appelle coordonnées de Darboux.

1.1.2. Sous-variétés isotropes et lagrangiennes

On peut également s'intéresser au comportement de la forme symplectique ω sur des sous-variétés de M . Étant donné un sous-espace vectoriel W_x de $T_x M$, on notera

$$W_x^\perp = \{X \in W_x \mid \forall Y \in W_x, \omega_x(X, Y) = 0\}.$$

Par exemple, la condition (1.1.1.a) est équivalente à $(T_x M)^\perp = \{0\}$.

Définition 1.1.4. Soit N une sous-variété de M . On dira que :

— N est *isotrope* si pour tout $x \in N$, $T_x N \subset (T_x N)^\perp$, c'est-à-dire si

$$\forall X, Y \in T_x N, \quad \omega_x(X, Y) = 0.$$

— N est *lagrangienne* si pour tout $x \in N$, $T_x N = (T_x N)^\perp$, ou de manière équivalente, si N est isotrope et de dimension maximale $n = \frac{1}{2} \dim M$.

Exemple 1.1.5. On se replace dans le cadre de la structure symplectique canonique sur T^*N , définie dans l'exemple (1.1.2.c). Alors :

— la section zéro

$$N_0 = \{(x, 0) \in T^*N \mid x \in N\}$$

est une sous-variété lagrangienne de T^*N ,

— toute fibre $T_q^*N = \pi^{-1}(q)$ est une sous-variété lagrangienne de T^*N ,

— si S est une sous-variété de N , son fibré conormal N^*S est une sous-variété lagrangienne de T^*N . ■

Parmi toutes les sous-variétés d'une variété symplectique (M, ω) , les variétés lagrangiennes sont d'un intérêt particulier. On a par exemple le théorème suivant, qui peut être vu comme une extension du théorème de Darboux à tout un voisinage d'une sous-variété lagrangienne.

Théorème 1.1.6 Weinstein [Wei71]. *Soit L une sous-variété lagrangienne de (M, ω) . Alors il existe un voisinage U de L dans M , un voisinage U_0 de L (vue comme la section zéro) dans T^*L , et un difféomorphisme $\varphi : U_0 \rightarrow U$ tels que*

$$\varphi|_L = \text{id}_L, \quad \varphi^*\omega = \omega_0,$$

où ω_0 est la structure symplectique canonique sur T^*L introduite dans l'exemple (1.1.2.c).

1.1.3. Champs de vecteurs hamiltoniens et crochet de Poisson

Étant donné un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ sur M , rappelons que la contraction de $\omega \in \Omega^2(M)$ par le vecteur X est la 1-forme $i_X\omega \in \Omega^1(M)$ définie par

$$\forall p \in M, \forall Y_p \in T_pM, \quad (i_X\omega)_p(Y_p) = \omega_p(X_p, Y_p).$$

La condition (1.1.1.a) satisfaite par une structure de Poisson ω sur M assure que si X_x est non-nul, alors la forme $(i_X\omega)_x : T_x^*M \rightarrow \mathbb{R}$ est non-nulle. Ainsi l'application

$$\omega^\flat \left| \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M) \\ X & \longmapsto & i_X\omega = \omega(X, \cdot) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme, on note traditionnellement $\omega^\sharp : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ son inverse.

En particulier, si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ est une fonction différentiable sur M , sa différentielle df est une 1-forme qui correspond donc via ω^\sharp à un unique champ de vecteurs sur M .

Définition 1.1.7. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ une fonction lisse sur M . Le *champ de vecteurs hamiltonien* associé à f est le champ de vecteurs $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ défini par

$$\omega(X_f, \cdot) = -df.$$

Remarque 1.1.8. Selon les auteurs, on peut trouver ou non le signe moins dans la définition ci-dessus. Fort heureusement, cela ne modifie que très peu les résultats qui suivent.

Étant donné un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$, on peut s'intéresser à ses *intégrales premières*. Ce sont les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ telles que $X \cdot f = 0$, c'est-à-dire les fonctions constantes le long des trajectoires de X ($X \cdot f$ désigne la dérivée de f dans la direction de X , parfois notée $\mathcal{L}_X f$). Connaître des intégrales premières de X permet de savoir que ses trajectoires sont contraintes à rester dans des sous-variétés de dimensions plus petites, définies par des équations de la forme $f = \text{cste}$.

Si X_f est un champ de vecteurs hamiltonien, alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on a

$$X_f \cdot g = dg(X_f) = -\omega(X_g, X_f) = \omega(X_f, X_g).$$

Définition 1.1.9. On définit le *crochet de Poisson* (associé à ω) de deux fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ par

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

Ainsi, g est une intégrale première du champ hamiltonien X_f si et seulement si le crochet $\{f, g\}$ est nul.

On peut montrer que ce crochet $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{C}^\infty(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ satisfait les propriétés suivantes :

— il est antisymétrique :

$$\{g, f\} = -\{f, g\},$$

— il est bilinéaire :

$$\{f_1 + \lambda f_2, g\} = \{f_1, g\} + \lambda \{f_2, g\}.$$

— c'est une dérivation en chacune de ses variables :

$$\{f_1 f_2, g\} = \{f_1, g\} f_2 + f_1 \{f_2, g\}.$$

— il vérifie l'identité de Jacobi :

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Ces quatre propriétés sont celles qui définissent, plus généralement, un crochet de Poisson (pas nécessairement issu d'une structure symplectique) sur une variété M quelconque.

Remarque 1.1.10. En particulier, $\mathcal{C}^\infty(M)$ muni du crochet de Poisson est une algèbre de Lie. Avec la convention de signe choisie ici dans la définition 1.1.7 de champ hamiltonien, on a pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g].$$

Ainsi l'application qui à une fonction associe son champ de vecteurs hamiltonien est un homomorphisme d'algèbres de Lie (avec une convention différente, ce serait un antihomomorphisme).

1.2. Systèmes dynamiques intégrables

1.2.1. Systèmes hamiltoniens intégrables

Définition 1.2.1. Un *système hamiltonien intégrable* sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$ est la donnée de n fonctions $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbb{R}$:

(1.2.1.a) commutant deux à deux pour le crochet de Poisson sur (M, ω) :

$$1 \leq i, j \leq n, \quad \{f_i, f_j\} = 0,$$

(1.2.1.b) fonctionnellement indépendantes sur un ouvert dense U :

$$\forall x \in U, \quad df_1(x) \wedge \dots \wedge df_n(x) \neq 0.$$

Cette notion d'intégrabilité est parfois appelée *intégrabilité à la Liouville*.

Remarque 1.2.2. Pour un système hamiltonien en mécanique classique, la fonction $f_1 = H$ joue un rôle particulier. Elle représente en général l'énergie totale du système, et son champ hamiltonien X_H est le champ de vecteurs associé au système d'équations différentielles décrivant l'évolution du système physique considéré. Ce dernier est intégrable si cette fonction H (appelée *hamiltonien* du système) admet $n - 1$ intégrales premières f_2, \dots, f_n indépendantes, parfois appelées *constantes du mouvement*.

Dans la définition mathématique plus générale ci-dessus, le rôle des fonctions f_1, \dots, f_n est interchangeable, et on s'intéresse plus généralement à l'application de M dans \mathbb{R}^n qu'elles forment collectivement.

Exemple 1.2.3. Regardons quelques exemples issus de la mécanique classique.

(1.2.3.a) **Le pendule simple.** On considère une bille pesante (de masse 1) attachée à un point fixe O par une tige rigide non-pesante de longueur 1, sous l'hypothèse que le mouvement se fait sans frottement et reste dans un plan vertical.

Soit $M = T^*S^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ avec coordonnées (q, p) , muni de la forme symplectique canonique sur le fibré cotangent. La coordonnée q représente la position de la bille, p sa vitesse. Les équations de la mécanique classique assurent que l'évolution $t \mapsto (q(t), p(t))$ du système est régie par les équations

$$\begin{cases} q'(t) = p(t), \\ p'(t) = -\sin q(t). \end{cases}$$

Le système d'équations différentielles ci-dessus peut se réécrire :

$$(q'(t), p'(t)) = X_H \cdot (q(t), p(t)) \tag{1.2.4}$$

où X_H est le champ de vecteurs hamiltonien associé à la fonction $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q.$$

Comme $\dim M = 2$, à elle seule la fonction $f_1 = H$ définit un système hamiltonien sur M .

(1.2.4.b) **Le pendule sphérique.** On reprend le système précédent en abandonnant l'hypothèse que le mouvement de la bille est plan. On travaille donc maintenant sur la variété $M = T^*\mathbb{S}^2$. On voit \mathbb{S}^2 comme une sous-variété de \mathbb{R}^3 muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3) , ainsi l'espace tangent $T_q\mathbb{S}^2$ au point q est un sous-espace vectoriel normé de \mathbb{R}^3 , et par dualité de Riesz on peut munir $T_q^*\mathbb{S}^2$ d'une norme. Pour cette norme, la fonction hamiltonien $H : T^*\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ décrivant le système est définie par

$$\forall (q, p) \in T^*\mathbb{S}^2, \quad H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 - \langle -e_3 \mid q \rangle.$$

Une intégrale première de X_H , fonctionnellement indépendante de H , est donnée par

$$f_2(q, p) = q_2p_1 - q_1p_2.$$

Physiquement, cette quantité correspond au moment angulaire et traduit le fait que le système est invariant par rotation autour de l'axe vertical $\mathbb{R}e_3$. La famille (H, f_2) définit un système hamiltonien intégrable sur $M = T^*\mathbb{S}^2$. ■

Définition 1.2.5. On appelle *application moment* du système intégrable (f_1, \dots, f_n) l'application

$$F = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

On dira que :

- $x \in M$ est un *point singulier* du système si c'est un point singulier de F , c'est-à-dire si la différentielle dF_x n'est pas de rang maximal,
- $c \in \mathbb{R}^n$ est une *valeur singulière* si c'est l'image d'un point singulier, sinon on dira que c'est une *valeur régulière*,
- $F^{-1}(c)$ est une *fibre singulière* du système si c'est la pré-image d'une valeur singulière, sinon on dira que c'est une *fibre régulière*.

Le théorème suivant est un résultat fondamental dans la théorie des systèmes hamiltoniens intégrables. Il apparaît souvent sous le nom de théorème d'Arnold–Liouville, mais on peut en trouver une première démonstration dans les travaux de l'astrophysicien Mineur [Min35, Min36, Min37], la démonstration d'Arnold [Arn89] étant apparue plus tard de manière indépendante.

Théorème 1.2.6 Arnold–Liouville–Mineur. *Soit N une fibre régulière compacte et connexe de l’application moment $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors N est une sous-variété lagrangienne de M difféomorphe à un tore \mathbb{T}^n de dimension n .*

Mieux, si on note $(\mu_1, \dots, \mu_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ les coordonnées sur $D^n \times \mathbb{T}^n$ et

$$\omega_0 = d\mu_1 \wedge d\beta_1 + \dots + d\mu_n \wedge d\beta_n$$

la forme symplectique canonique sur $D^n \times \mathbb{T}^n$, alors il existe un voisinage U de N dans M et un difféomorphisme $\psi : U \rightarrow D^n \times \mathbb{T}^n$ tels que :

$$\psi(N) = \{0\} \times \mathbb{T}^n, \quad \omega = \psi^*(\omega_0),$$

et F ne dépend que des variables $\psi^\mu_1, \dots, \psi^*\mu_n$.*

Avec les notations du théorème précédent, on appelle

- variables *action* les variables $I_1 = \psi^*\mu_1, \dots, I_n = \psi^*\mu_n$,
- variables *angle* les variables $\theta_1 = \psi^*\beta_1, \dots, \theta_n = \psi^*\beta_n$,

et *coordonnées action–angle* les coordonnées locales $(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$ au voisinage de N . Autrement dit, le théorème d’Arnold–Liouville–Mineur affirme qu’au voisinage d’une fibre régulière compacte, on a une fibration triviale en tores lagrangiens, appelés *tors de Liouville*. Si l’application moment F est propre (c’est-à-dire si l’image réciproque par F de tout compact est encore compacte), alors on a une fibration en tores lagrangiens au-dessus de toute la partie régulière de F , appelée parfois *fibration de Liouville*.

1.2.2. Systèmes non-hamiltoniens intégrables

On se place maintenant sur une variété M de dimension n quelconque, et on fixe un champ de vecteurs X sur M . Ce champ définit naturellement un système dynamique sur M , à savoir celui formé par les trajectoires $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ vérifiant l’équation différentielle :

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \tag{1.2.7}$$

autrement dit formé par les courbes intégrales du flot de X . Cette équation (1.2.7) généralise naturellement l’équation (1.2.4), décrivant l’évolution d’un système hamiltonien, au cas où le champ de vecteurs X n’est plus nécessairement hamiltonien (par exemple parce que son flot ne préserve aucune structure symplectique sur M , ou encore parce que la variété M elle-même n’admet pas de structure symplectique). On peut alors étendre naturellement la notion d’intégrabilité sur cette classe plus large de systèmes de la façon suivante.

Définition 1.2.8. Le système (non-hamiltonien) défini par un champ de vecteurs X sur une variété M est dit *intégrable* s'il existe une famille de p champs de vecteurs $X_1 = X, X_2, \dots, X_p$ sur M et une famille de q fonctions lisses $f_1, \dots, f_q : M \rightarrow \mathbb{R}$, telles que :

(1.2.8.a) les champs de vecteurs X_1, \dots, X_p commutent deux à deux pour le crochet de Lie des champs de vecteurs :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad [X_i, X_j] = 0,$$

(1.2.8.b) les fonctions f_1, \dots, f_q sont des intégrales premières de chacun des champs X_1, \dots, X_p :

$$\forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq q, \quad X_i \cdot f_j = 0,$$

(1.2.8.c) il existe un ouvert dense U de M sur lequel les champs de vecteurs X_1, \dots, X_p sont linéairement indépendants et les fonctions f_1, \dots, f_q sont fonctionnellement indépendantes :

$$\forall x \in U, \quad X_1(x) \wedge \dots \wedge X_p(x) \neq 0 \text{ et } df_1(x) \wedge \dots \wedge df_q(x) \neq 0,$$

(1.2.8.d) $p + q = \dim M$.

Remarque 1.2.9. La définition ci-dessus englobe le cas hamiltonien. En effet, soit (f_1, \dots, f_n) une famille de fonctions lisses sur une variété symplectique (M, ω) de dimension $2n$. Considérons la famille des n champs de vecteurs hamiltoniens X_{f_1}, \dots, X_{f_n} associés. Rappelons que pour tout $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ on a les relations

$$\begin{cases} [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}, \\ X_f \cdot g = \{f, g\}. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que les conditions (1.2.8.a) et (1.2.8.b) sur la famille $(X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n)$ dans la définition ci-dessus sont équivalentes à la commutativité des fonctions f_1, \dots, f_n pour le crochet de Poisson sur M . Autrement dit, (f_1, \dots, f_n) est un système hamiltonien intégrable sur (M, ω) si et seulement si la famille $(X_1, \dots, X_n, f_1, \dots, f_n)$ est intégrable sur M dans le sens plus général ci-dessus.

Comme dans le cas hamiltonien, on n'attribue pas de rôle particulier au champ de vecteur X initialement choisi, et on appelle plus généralement système non-hamiltonien intégrable de signature (p, q) sur M toute famille

$$(X_1, \dots, X_p, f_1, \dots, f_q)$$

de p champs de vecteurs et q fonctions lisses sur M satisfaisant les conditions de la définition 1.2.8.

Le cas des systèmes de signature $(n, 0)$

Soit $(X_1, \dots, X_p, f_1, \dots, f_q)$ un système non-hamiltonien intégrable sur une variété M . Alors les sous-variétés (éventuellement singulières) de la forme

$$\{F_1 = c_1, \dots, F_q = c_q\}, \quad c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}$$

sont invariantes pour le système, et la famille (X_1, \dots, X_p) définit un système non-hamiltonien intégrable sur chacune de ces sous-variétés de dimension p . Une première étape dans la compréhension de la topologie des systèmes non-hamiltoniens intégrables est donc l'étude des systèmes de signature $(n, 0)$. Ce sont ces systèmes qui seront étudiés dans la deuxième partie de cette thèse. C'est pourquoi dans toute la suite, on suppose $(p, q) = (n, 0)$.

Définition 1.2.10. Soit un système non-hamiltonien intégrable (X_1, \dots, X_n) de signature $(n, 0)$ sur une variété M . Le *rang* d'un point $p \in M$ (pour ce système) est la dimension du sous-espace vectoriel

$$\text{Vect}(X_1(p), \dots, X_n(p)) \subset T_p M.$$

On appelle *point singulier* un point de rang strictement inférieur à $n = \dim M$, et plus particulièrement *point fixe* un point de rang nul.

Supposons que $p \in M$ soit un point fixe. Pour tout $1 \leq i \leq n$, notons X_i^{lin} la partie linéaire du champ de vecteurs X_i en p . On dira que le point p est *non-dégénéré* si les vecteurs $X_1^{\text{lin}}(p), \dots, X_n^{\text{lin}}(p)$ engendrent une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(T_p M)$, c'est-à-dire une sous-algèbre de dimension n formée de matrices semi-simples. On étend ensuite cette notion de non-dégénérescence à des points singuliers de rang quelconque. Supposons que $p \in M$ soit un point de rang $0 < r < n$, et notons $k = n - r$ son *corang*. Alors sans perte de généralité, on peut supposer

$$X_1(p) = \dots = X_k(p) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k < i \leq n, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dans un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) centrées en p . Dans ce cas, les projections de X_1, \dots, X_k sur la variété (locale)

$$N = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$

définissent un système non-hamiltonien de signature $(k, 0)$, pour lequel l'origine 0 est point fixe. On dira que p est un point singulier *non-dégénéré* si l'origine est un point fixe non-dégénéré pour ce dernier système (on peut vérifier que cela ne dépend pas du système de coordonnées (x_1, \dots, x_n) choisi).

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les champs de vecteurs X_1, \dots, X_n sont complets, c'est-à-dire que leurs flots sont définis sur tout \mathbb{R} (c'est automatiquement le cas par exemple lorsque la variété M est compacte). Dans ce cas, la donnée du système non-hamiltonien intégrable (X_1, \dots, X_n) est équivalente à la donnée d'une action ρ de \mathbb{R}^n sur la variété M , définie par les flots de X_1, \dots, X_n . Autrement dit, si (e_1, \dots, e_n) désigne la base canonique de \mathbb{R}^n , l'action du vecteur e_i sur M vérifie

$$\forall p \in M, \quad X_i(p) = \left. \frac{d}{dt} \rho(te_i, p) \right|_{t=0}.$$

Plus généralement, pour tout vecteur $v = (v^1, \dots, v^n)$ de \mathbb{R}^n , on définit le *générateur de l'action ρ dans la direction v* comme le champ de vecteurs

$$X_v = v^1 X_1 + \dots + v^n X_n$$

dont le flot engendre l'action de v sur M . La notion de rang définie précédemment coïncide avec celle de rang d'un point pour l'action ρ : le point $p \in M$ est de rang r si et seulement si l'orbite $\mathcal{O}(p)$ de ρ passant par p est de dimension r . On supposera dorénavant que l'action est *non-dégénérée*, c'est-à-dire que ses points singuliers sont non-dégénérés au sens des systèmes non-hamiltoniens intégrables.

Notons

$$Z = \{g \in \mathbb{R}^n \mid \forall p \in M, \rho(g, p) = p\}$$

le groupe d'isotropie de l'action. Comme l'action ρ est non-dégénérée, alors en particulier ce groupe est localement libre. Il est donc isomorphe à un groupe produit \mathbb{Z}^k , avec $0 \leq k \leq n$. En particulier, l'action de ρ se réduit à une action de $\mathbb{R}^n/Z \approx \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ sur M .

Définition 1.2.11. On appelle *degré torique* d'une action non-dégénérée ρ de \mathbb{R}^n sur M le rang (sur \mathbb{Z}) de son groupe d'isotropie, autrement dit le plus grand entier k tel que l'action ρ se réduit à une action

$$\tilde{\rho} : (\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) \times M \rightarrow M.$$

On appelle *action totalement hyperbolique* une action non-dégénérée de degré torique nul.

Autrement dit, une action totalement hyperbolique est une action fidèle de \mathbb{R}^n sur une variété M de dimension n , dont les singularités sont non-dégénérées.

Classification des actions totalement hyperboliques

Dans [ZM14], Minh et Zung ont notamment donné une classification complète des actions totalement hyperboliques sur une variété compacte M , où chaque action est déterminée par la partition de M en ses orbites et la donnée d'un éventail complet de \mathbb{R}^n compatible.

Commençons par rappeler le résultat suivant donnant une forme normale locale pour les actions totalement hyperboliques.

Théorème 1.2.12 [BMRZ16, théorème 3.2.27]. *Soit $p \in M$ un point de rang r d'une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$. Alors il existe un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) centrées en p et une base (v_1, \dots, v_n) de \mathbb{R}^n tels que les générateurs de l'action dans les directions v_1, \dots, v_n sont de la forme*

$$X_{v_1} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X_{v_k} = x_k \frac{\partial}{\partial x_k}, X_{v_{k+1}} = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}, \dots, X_{v_n} = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

avec $k = n - r$ le corang de p .

On dira que (x_1, \dots, x_n) sont des *coordonnées canoniques* et que (v_1, \dots, v_n) est une *base adaptée* (pour l'action ρ) au voisinage de p .

Théorème 1.2.13 [ZM14, théorème 2.8]. *Soit (x_1, \dots, x_n) un système de coordonnées canoniques et (v_1, \dots, v_n) une base adaptée au voisinage d'un point p fixé. Notons k le corang de p . Alors :*

- *si (y_1, \dots, y_n) est un système de coordonnées canoniques et (w_1, \dots, w_n) une base adaptée au voisinage du même point p , alors la famille (w_1, \dots, w_k) est une permutation de la famille (v_1, \dots, v_k) ,*
- *réciroquement, si (w_1, \dots, w_n) est une base de \mathbb{R}^n telle que (w_1, \dots, w_k) est une permutation de (v_1, \dots, v_k) , alors il existe un système de coordonnées canoniques (y_1, \dots, y_n) au voisinage de p pour lequel (w_1, \dots, w_n) est une base adaptée.*

Une conséquence particulière de ce théorème est que si $p \in M$ est un point singulier de rang $n - 1$, alors le premier vecteur v_1 des bases adaptées au voisinage de p est uniquement déterminé. On dit que v_1 est le vecteur associé à l'orbite $\mathcal{O}(p)$ passant par p (de dimension $n - 1$). On va utiliser ce résultat pour associer un éventail dans \mathbb{R}^n aux orbites de dimension maximale de l'action.

Définition 1.2.14. Soit ρ une action totalement hyperbolique sur une variété M de dimension n . On appelle *domaine hyperbolique* de ρ une orbite de dimension n .

Proposition 1.2.15 [ZM14, prop. 5.2 et th. 5.4]. *Soit \mathcal{O} un domaine hyperbolique d'un action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$. Notons $\bar{\mathcal{O}}$ son adhérence dans M . Si $\bar{\mathcal{O}}$ est compacte, alors :*

- (1.2.15.a) $\bar{\mathcal{O}}$ contient un point fixe de ρ ,
 (1.2.15.b) plus généralement, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\bar{\mathcal{O}}$ contient une orbite de dimension k de ρ ,
 (1.2.15.c) la partition de $\bar{\mathcal{O}}$ en les orbites de ρ définit une décomposition cellulaire de $\bar{\mathcal{O}}$ où chaque orbite de dimension k est une cellule de dimension k .

Plus généralement, $\bar{\mathcal{O}}$ est une variété à bords et à coins.

Soit \mathcal{O} un domaine hyperbolique. On a de plus le résultat suivant :

Lemme 1.2.16 [ZM14, lemme 5.5]. *Supposons encore que le domaine hyperbolique \mathcal{O} est relativement compact (c'est-à-dire d'adhérence compacte). Alors pour tout point $p \in \mathcal{O}$ et pour tout vecteur $w \in \mathbb{R}^n$, la courbe*

$$t \mapsto \phi_w^t(p) = \rho(-tw, p)$$

converge vers un point de $\bar{\mathcal{O}}$ lorsque t tend vers $+\infty$.

En particulier si w est le vecteur associé à une orbite $\mathcal{O}^{(n-1)} \subset \bar{\mathcal{O}}$ de dimension $n-1$, alors pour tout $p \in \mathcal{O}$ la courbe $t \mapsto \phi_w^t(p)$ tend vers un élément dans $\mathcal{O}^{(n-1)}$ lorsque t tend vers $+\infty$. Étant donnée une orbite $\mathcal{H} \subset \bar{\mathcal{O}}$ de dimension quelconque, considérons l'ensemble

$$C_{\mathcal{H}} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_w^t(p_0) \in \mathcal{H}\}$$

où $p_0 \in \mathcal{O}$ est un point fixé dans le domaine hyperbolique \mathcal{O} .

Proposition 1.2.17 [ZM14, proposition 5.6]. *Supposons encore $\bar{\mathcal{O}}$ compact. Alors on a les propriétés suivantes :*

- (1.2.17.a) $C_{\mathcal{H}}$ ne dépend pas du choix de $p_0 \in \mathcal{O}$,
 (1.2.17.b) $C_{\mathcal{O}} = \{0\}$,
 (1.2.17.c) pour toute orbite \mathcal{O}_i de dimension $n-1$ dans $\bar{\mathcal{O}}$, on a $C_{\mathcal{O}_i} = \mathbb{R}_{>0}v_i$ où v_i est le vecteur associé à \mathcal{O}_i ,
 (1.2.17.d) si $w \in C_{\mathcal{H}}$, alors le générateur X_w dans la direction w est nul sur \mathcal{H} ,
 (1.2.17.e) $\bar{C}_{\mathcal{H}}$ est un cône simplicial fortement convexe dans \mathbb{R}^n , dont la dimension vérifie $\dim \bar{C}_{\mathcal{H}} + \dim \mathcal{H} = n$,
 (1.2.17.f) $C_{\mathcal{H}_1} \subset \bar{C}_{\mathcal{H}_2}$ si et seulement si $\mathcal{H}_1 \subset \bar{\mathcal{H}}_2$, et dans ce cas $C_{\mathcal{H}_1}$ est une face du cône $\bar{C}_{\mathcal{H}_2}$.

La donnée d'une telle partition $\sqcup_{\mathcal{H}} C_{\mathcal{H}}$ de \mathbb{R}^n s'appelle un *éventail complet* de \mathbb{R}^n , noté $(C_{\mathcal{H}}, v_i)$. Par abus, on parlera parfois simplement de l'éventail (v_1, \dots, v_n) , où v_1, \dots, v_n sont les vecteurs associés aux orbites de dimension $n-1$ dans $\bar{\mathcal{O}}$, qui

engendrent les composantes de dimension 1 de l'éventail, et à partir desquels on peut en fait reconstruire toutes les composantes de l'éventail.

L'intérêt de ces éventails est de caractériser de manière unique l'action de ρ sur l'adhérence $\bar{\mathcal{O}}$ du domaine hyperbolique \mathcal{O} .

Théorème 1.2.18 [ZM14, théorème 5.8]. *Soit $(C_{\mathcal{H}}, v_i)$ un éventail complet de \mathbb{R}^n . Alors :*

- *il existe une variété M fermée compacte et une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ telle que ρ admet un domaine hyperbolique \mathcal{O} dont l'éventail associé est $(C_{\mathcal{H}}, v_i)$,*
- *si M_1, M_2 sont deux variétés compactes, chacune munie d'une action totalement hyperbolique $\rho_i : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ dont une orbite hyperbolique \mathcal{O}_i a pour éventail associé l'éventail $(C_{\mathcal{H}}, v_i)$, alors il existe un difféomorphisme de \mathcal{O}_1 dans \mathcal{O}_2 qui entrelace les actions ρ_1 et ρ_2 .*

On peut ensuite chercher une caractérisation globale de l'action sur toute la variété M .

Lemme 1.2.19 [Bou16, lemme 1]. *Soit ρ une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^n sur une variété M compacte et connexe. Alors les orbites de dimension $(n-1)$ de l'action se recollent en N hypersurfaces lisses fermées H_1, \dots, H_N deux à deux transverses, et telles que si deux orbites de dimensions $(n-1)$ appartiennent à la même hypersurface H_i , alors elles ont le même vecteur associé v_i dans \mathbb{R}^n .*

Ainsi, à une action hyperbolique ρ sur variété M on peut faire correspondre :

- un nombre fini d'hypersurfaces H_1, \dots, H_N dans M , deux à deux transverses, et telles que

$$M \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_N)$$

est l'union disjointe des domaines hyperboliques de ρ ,

- un éventail de \mathbb{R}^n engendré par des vecteurs v_1, \dots, v_N tels que chaque v_i est le vecteur associé aux orbites de dimension $(n-1)$ contenues dans H_i .

Ces deux éléments, en plus d'une notion de monodromie, forment un système complet d'invariants pour les actions hyperboliques :

Théorème 1.2.20 [ZM14, théorème 5.14]. *Soient (M_1, ρ_1) et (M_2, ρ_2) deux variétés munies d'actions totalement hyperboliques. S'il existe un difféomorphisme $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ qui envoie les domaines hyperboliques de ρ_1 sur les domaines hyperboliques de ρ_2 , et qui préserve les éventails associés et la monodromie, alors il existe un difféomorphisme $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$ qui entrelace les actions ρ_1 et ρ_2 .*

Réciproquement, étant donnée une variété M compacte de dimension n , si on a :

- une famille finie d'hypersurfaces H_1, \dots, H_N deux à deux transverses, découpant M en un nombre fini de parties $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m$ relativement compactes,
- un éventail complet de \mathbb{R}^n engendré par N vecteurs v_1, \dots, v_N ,

alors cela correspond aux invariants d'une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^N \times M \rightarrow M$ pourvu que la condition de compatibilité suivante soit vérifiée : pour tout $1 \leq i \leq m$, l'ensemble

$$\{v_j \mid 1 \leq j \leq n \text{ tel que } \bar{\mathcal{O}}_i \cap H_j \neq \emptyset\}$$

engendre encore un éventail complet de \mathbb{R}^n (c'est-à-dire que notamment, chacun des cônes de cet éventail doit être fortement convexe), dont l'agencement des vecteurs dans \mathbb{R}^n est identique (d'un point de vue combinatoire) à l'agencement des hypersurfaces correspondantes autour de l'orbite \mathcal{O}_i .

Exemple 1.2.21 [ZM14, théorème 5.11]. Le tableau 1.1 recense des exemples d'actions totalement hyperboliques en dimension 2, c'est-à-dire lorsque M est une surface fermée. On donne une décomposition de M en un nombre fini de domaines compacts séparés par des courbes fermées H_1, \dots, H_N , et un éventail complet (v_1, \dots, v_N) dans \mathbb{R}^2 , de sorte que l'ensemble soit compatible. Ainsi, ces domaines et cet éventail sont les invariants d'une action totalement hyperbolique sur M . Dans chaque cas, par symétrie, il suffit de montrer que l'éventail est compatible sur le domaine coloré.

Pour le cas d'une surface M_g de genre $g \geq 0$ non-orientable, on plonge d'abord la surface orientable \tilde{M}_g de genre g dans \mathbb{R}^3 de sorte à ce qu'elle soit invariante par l'involution $\sigma : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. On choisit alors une décomposition en domaines hyperboliques sur \tilde{M}_g invariante par σ , qui par suite induit une décomposition en domaines hyperboliques sur M_g . ■

1.3. Actions de groupe et variétés quotient

1.3.1. Cas d'un quotient lisse

Rappelons tout d'abord qu'un *groupe de Lie* est un groupe G muni d'une structure de variété lisse, tel que les opérations de multiplication et d'inverse soient des applications différentiables. L'action d'un groupe de Lie G sur une variété lisse M est dite *lisse* si l'application

$$\rho \left| \begin{array}{ll} G \times M & \longrightarrow M \\ (g, x) & \longmapsto g \cdot x \end{array} \right.$$

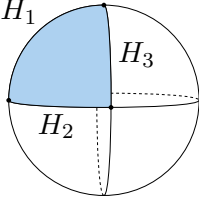
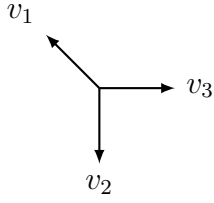
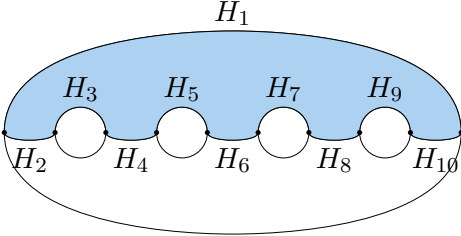
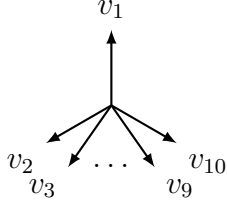
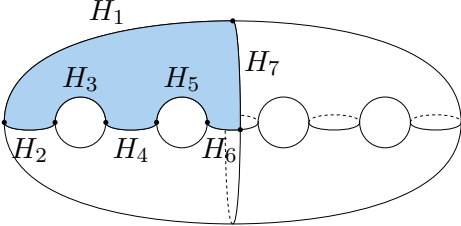
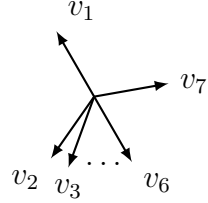
Surface	Décomposition en domaines hyperboliques	Éventail associé
S^2		
Surface orientable de genre ≥ 1		
Surface non-orientable de genre $g \geq 0$		

FIGURE 1.1. : Exemples d'actions hyperboliques sur les surfaces fermées

est lisse. Dans ce qui suit on considérera toujours des actions lisses. Rappelons brièvement le vocabulaire des actions de groupes.

Définition 1.3.1. Soit G un groupe de Lie agissant (de manière lisse) sur une variété M . Alors :

- l'*orbite* d'un élément $x \in M$ est l'ensemble

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\},$$

- le *stabilisateur*, ou *sous-groupe d'isotropie*, d'un élément $x \in M$ est le sous-groupe

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

(parfois noté aussi $\text{Stab}(x)$),

- l'action est *transitive* si pour tout $x, y \in M$, il existe un élément $g \in G$ tel que $y = g \cdot x$, autrement dit si

$$\forall x \in M, \quad \mathcal{O}(x) = M,$$

- l'action est *libre* si pour tout $x \in M$ et $g \in G$, $g \cdot x = x$ implique $g = 1$, autrement dit si

$$\forall x \in M, \quad G_x = \{1\},$$

- l'action est *propre* si l'application

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \longrightarrow & M \times M \\ (g, x) & \longmapsto & (g \cdot x, x) \end{array}$$

est propre (l'image d'un compact est un compact). Si G est compact, cette propriété est automatiquement vérifiée.

Précisons d'abord que les orbites de l'action lisse d'un groupe de Lie sur une variété sont toujours des sous-variétés.

Théorème 1.3.2 [Aud12, Th. I.1.1, Cor. I.1.2 et Th. 1.4.8]. *Soit G un groupe de Lie agissant de manière lisse sur une variété M . Alors pour tout $x \in M$, en notant G_x le stabilisateur de x , on a les propriétés suivantes :*

- *il existe une unique structure de variété lisse sur G/G_x telle que la projection canonique $G \rightarrow G/G_x$ soit une submersion,*
- *l'application $p_x : G \rightarrow M$ définie par $p_x(g) = g \cdot x$ induit une immersion injective $\bar{p}_x : G/G_x \rightarrow M$ d'image $\mathcal{O}(x)$,*
- *si de plus G est compact, alors l'orbite $\mathcal{O}(x)$ est une sous-variété plongée de M difféomorphe à l'espace homogène G/G_x .*

Intéressons-nous maintenant à l'ensemble des orbites de l'action. C'est l'ensemble quotient M/G pour la relation d'équivalence d'appartenance à une même orbite, et il est naturellement muni de la topologie quotient. Lorsque l'action est propre, M/G est séparé pour cette topologie. On a le résultat suivant :

Théorème 1.3.3 [Aud12, Proposition I.1.11]. *Si l'action de G sur M est propre et libre, alors il existe une unique structure de variété lisse sur M/G telle que la projection $\pi : M \rightarrow M/G$ soit une submersion lisse. On a alors :*

$$\dim M/G = \dim M - \dim G.$$

Remarque 1.3.4. Plus précisément, sous les hypothèse du théorème précédent, $\pi : M \rightarrow M/G$ est un G -fibré principal.

Si (M, ω) est une variété symplectique, on peut de plus s'intéresser à la compatibilité de l'action avec la structure symplectique et se demander dans quels cas on peut construire des variétés quotients elles-mêmes munies d'une structure symplectique naturelle. Commençons par introduire la définition suivante.

Définition 1.3.5. Soit G un groupe de Lie agissant (de manière lisse) sur une variété lisse M . L'action infinitésimale d'un élément $\xi \in \mathfrak{g}$ sur la variété M est le champ de vecteurs $\rho(\xi)$ sur M défini par

$$\forall x \in M, \quad \rho(\xi)_x = \left. \frac{d}{dt} \exp(-t\xi) \cdot x \right|_{t=0}$$

c'est-à-dire le champ de vecteurs de flot $\varphi^t(x) = \exp(-t\xi) \cdot x$.

Dans la définition ci-dessus, \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie du groupe G (que l'on peut définir comme l'espace tangent $T_e G$ à G en l'élément neutre), et $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ est l'application exponentielle qui, dans le cas où G est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$ (et donc \mathfrak{g} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) coïncide avec l'exponentielle de matrices usuelle.

Définition 1.3.6. Une action $\rho : G \times M \rightarrow M$ sur une variété symplectique (M, ω) est dite :

- *symplectique* si pour tout $g \in G$, l'application $\rho_g : x \mapsto g \cdot x$ est un symplectomorphisme, c'est-à-dire $(\rho_g)^* \omega = \omega$,
- *hamiltonienne* s'il existe une application linéaire $\hat{\mu} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, appelée *application comoment*, satisfaisant les propriétés suivantes :
 - pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, l'action infinitésimale $\rho(\xi)$ coïncide avec le champ de vecteurs hamiltonien $X_{\hat{\mu}(\xi)}$,
 - $\hat{\mu}$ est une morphisme d'algèbres de Lie :

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{g}, \quad \{\hat{\mu}(\xi_1), \hat{\mu}(\xi_2)\} = [\xi_1, \xi_2].$$

De manière équivalente, une action hamiltonienne est définie par une *application moment* $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ telle que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, l'action infinitésimale $\rho(\xi)$ coïncide avec le champ de vecteurs hamiltonien X_{H_ξ} associé à la fonction $H_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $H_\xi(x) = \mu(x)(\xi)$, c'est-à-dire :

$$dH_\xi = -\omega(\rho(\xi), \cdot).$$

Les applications moment et comoment sont liées par la relation $\mu(x)(\xi) = \hat{\mu}(\xi)(x)$ pour tout $x \in M$ et $\xi \in \mathfrak{g}$.

Si $\eta \in \mathfrak{g}^*$ est une valeur régulière de l'application moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$, alors sa préimage $\mu^{-1}(\eta)$ est une sous-variété lisse invariante par G , de dimension $\dim M - \dim G$. On peut alors s'intéresser à son quotient par l'action de G .

Théorème 1.3.7 Marsden–Weinstein [MW74]. *Soit ρ une action hamiltonienne d'un groupe de Lie G sur une variété symplectique (M, ω) , d'application moment $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$.*

Soit $\eta \in \mathfrak{g}^$ une valeur régulière de μ telle que l'action de G sur $\mu^{-1}(\eta)$ est propre et libre. Alors il existe une unique structure symplectique ω_{red} sur la variété quotient*

$$M//_{\eta} G = \mu^{-1}(\eta)/G$$

qui soit « naturelle », au sens où elle vérifie

$$\pi^* \omega_{\text{red}} = i^* \omega$$

avec $\pi : \mu^{-1}(\eta) \rightarrow \mu^{-1}(\eta)/G$ la projection sur le quotient et $i : \mu^{-1}(\eta) \hookrightarrow M$ l'inclusion.

La variété symplectique $(M//_{\eta} G, \omega_{\text{red}})$ obtenue est appelée quotient de Marsden–Weinstein ou quotient symplectique de M par l'action hamiltonienne de G en la valeur η .

1.3.2. Quotients non-lisses et orbispaces

On suppose maintenant qu'un groupe de Lie G compact agit sur une variété symplectique (M, ω) sans que l'action ne soit libre. Ainsi l'espace quotient M/G n'est plus une variété. Toutefois, on peut encore le munir d'une structure d'orbispace symplectique, dont on rappelle ici la définition.

Décompositions et stratifications

On suppose ici que X est un espace topologique à base dénombrable séparé et paracompact. C'est le cas par exemple de l'espace M/G muni de la topologie quotient.

Définition 1.3.8. Une *décomposition* de X est une partition

$$X = \bigsqcup_{i \in I} S_i$$

localement finie de X par des sous-espaces localement fermés, appelés *morceaux* ou *strates*, satisfaisant les propriétés suivantes :

(1.3.8.a) pour tout $i \in I$, S_i est une variété lisse (pour la topologie induite),

(1.3.8.b) pour tout $i, j \in I$, si $S_i \cap \bar{S}_j \neq \emptyset$, alors $S_i \subset \bar{S}_j$.

Une *stratification* de X est la donnée pour tout $x \in X$ d'un germe d'ensembles S_x au point x d'un sous-ensemble fermé de X , vérifiant la condition suivante :

(1.3.8.c) pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x et une décomposition D de U telle que pour tout $y \in U$, la strate de D contenant y ait pour germe d'ensemble S_y .

L'ensemble (X, S) est appelé un *espace stratifié*.

Rappelons qu'un *germe d'ensemble* dans un espace topologique E est une classe d'équivalence pour la relation d'équivalence sur les parties de E définie pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$ par

$$A \sim B \iff \text{il existe } U \text{ ouvert de } E \text{ contenant } x \text{ tel que } A \cap U = B \cap U.$$

Toute décomposition de X induit une stratification de X . La réciproque est également vraie : étant donnée une stratification S de X , il existe une décomposition D_0 de X induisant S *maximale* au sens où pour toute autre décomposition D de X induisant S , toute strate de D est contenue dans une strate de D_0 . Par abus, on désignera désormais par stratification aussi bien la stratification elle-même que la décomposition maximale correspondante. Les notions de stratification, décomposition et décomposition maximale sur X sont en quelque sorte les analogues des notions de structure de variété, atlas et atlas maximal respectivement.

L'action propre de G sur M fournit un exemple de stratification sur la variété M et sur l'espace quotient $X = M/G$. Pour tout sous-groupe $H < G$, notons :

- G_x le groupe d'isotropie de l'action en un point $x \in M$,
- $N(G_x)$ son normalisateur dans G , c'est-à-dire le plus grand sous-groupe de G dans lequel G_x est normal,
- $M_H = \{x \in M \mid G_x = H\}$,
- $M_{(H)} = \{x \in M \mid G_x \text{ est conjugué à } H\}$.

Lorsque $M_{(H)}$ est non-vide, on dit que la classe de conjugaison (H) de H est un *type d'orbite*.

Proposition 1.3.9 [Pff01, section 4.3]. *Soit G un groupe de Lie agissant proprement sur une variété M . Alors :*

(1.3.9.a) *la partition de M*

$$M = \bigsqcup_{(H)} M_{(H)}$$

indexée par les types d'orbites définit une stratification sur M ,

(1.3.9.b) la stratification ci-dessus induit une stratification sur l'espace quotient M/G , où pour tout $x \in M$ la strate $S_x = M_{(G_x)}/G$ contenant $[x] \in M/G$ est difféomorphe au quotient M_{G_x}/Γ_x de M_{G_x} par le groupe $\Gamma_x = N(G_x)/G_x$.

Ces deux stratifications sont appelées stratifications par type d'orbite sur M et M/G respectivement.

Remarque 1.3.10. On peut montrer de plus que si le quotient G/M est connexe, alors on a à chaque fois une strate ouverte et dense, à savoir $M_{(G_0)}$ et $M_{(G_0)}/G$ respectivement où G_0 est un sous-groupe compact de G contenu (à conjugaison près) dans n'importe quel groupe d'isotropie G_x , $x \in M$.

Orbispaces et orbifibrés vectoriels

Définition 1.3.11. On appelle *carte d'orbispace* sur X un triplet $(\tilde{U}, G, \tilde{\pi})$ avec

- \tilde{U} une variété lisse,
- G un groupe de Lie compact agissant de manière lisse sur \tilde{U} ,
- $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$ une application lisse à valeurs dans un ouvert U de X induisant un homéomorphisme $\pi : \tilde{M}/G \rightarrow U$.

On dit que \tilde{U} est le *domaine* de la carte, et U son *image*.

Il conviendrait ensuite de définir les notions de changement de cartes d'orbispace, d'atlas d'orbispace et d'équivalence entre ces atlas, pour arriver à la définition générale d'orbispace. Toutefois dans cette thèse, la théorie des orbispaces sera utilisée seulement dans la section 2.1.3, pour des orbispaces pouvant chacun être défini par une seule carte. Par conséquent dans tout ce qui suit, on travaillera seulement avec la notion d'*orbispace monocarte*, qu'on définit comme un espace topologique X muni d'une carte d'orbispace $(\tilde{X}, G, \tilde{\pi})$ d'image X , et qu'on notera $(X; \tilde{X}, G, \tilde{\pi})$ (ou parfois par abus simplement X). Pour une définition plus générale d'orbispace via un atlas constitué de plusieurs cartes d'orbispace, on invite le lecteur à consulter [Pfl03].

Remarque 1.3.12. Finalement un orbispace monocarte n'est rien d'autre qu'une G -variété, c'est-à-dire la donnée d'une variété lisse et de l'action lisse d'un groupe de Lie sur celle-ci. Toutefois on préférera utiliser le vocabulaire de la théorie des orbispaces, d'où proviennent les définitions (des analogues) de fibré, espace tangent et structure symplectique qu'on utilise par la suite.

Définition 1.3.13. On appelle *fonction lisse* sur un orbispace monocarte $(X; \tilde{X}, G, \tilde{\pi})$ toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction relevée $\tilde{f} = f \circ \tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse (au sens de la géométrie différentielle usuelle). On note $\mathcal{C}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions lisses sur l'orbispace X .

Une fonction lisse entre deux orbispaces monocartes $(X_1; \tilde{X}_1, G_1, \tilde{\pi}_1)$ et $(X_2; \tilde{X}_2, G_2, \tilde{\pi}_2)$ est la donnée d'une fonction continue $f : X \rightarrow Y$ telle que pour tout $f_2 \in \mathcal{C}^\infty(X_2)$ on ait $f_2 \circ f \in \mathcal{C}^\infty(X_1)$.

Définition 1.3.14. Un *orbifibré vectoriel*¹ (lisse) sur un orbispace monocarte $(X; \tilde{X}, G, \tilde{\pi})$ est la donnée d'un fibré vectoriel (lisse) $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{X}$ et d'une action lisse de G sur \tilde{E} telle que l'application \tilde{p} soit G -invariante :

$$\forall g \in G, \forall v \in \tilde{E}, \quad \tilde{p}(g \cdot v) = g \cdot \tilde{p}(v).$$

Notons qu'en particulier, si on note $E = \tilde{E}/G$ l'espace quotient et $\tilde{\pi}_E : \tilde{E} \rightarrow E$ la projection naturelle, alors $(E; \tilde{E}, G, \tilde{\pi}_E)$ est un orbispace monocarte (et l'application $p : E \rightarrow X$ induite par \tilde{p} est une application lisse entre orbispaces).

Une *section* de l'orbifibré vectoriel $\tilde{p} : (E; \tilde{E}, G, \tilde{\pi}_E) \rightarrow (X; \tilde{X}, G, \tilde{\pi})$ est une application continue $s : E \rightarrow X$ telle que $p \circ s = \text{id}_X$. Cette section est dite *lisse* si $s : E \rightarrow X$ est lisse au sens de la définition 1.3.13.

Remarque 1.3.15. En particulier si $\tilde{s} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{X}$ est une section lisse G -invariante du fibré vectoriel $\tilde{p} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{X}$, alors elle induit une section lisse $s : E \rightarrow X$ au sens des orbispaces.

Comme un orbifibré vectoriel E sur un orbispace monocarte X est lui-même un orbispace monocarte, on peut lui associer sa stratification par type d'orbite. Toutefois, on va préférer associer à E un autre espace stratifié dont chaque strate sera l'espace total d'un fibré vectoriel lisse sur une strate de la décomposition de X .

Proposition 1.3.16 [Pf03, 2.10]. *Soit $(E; \tilde{E}, G, \tilde{\pi}_E)$ un orbifibré vectoriel sur un orbispace monocarte $(X; \tilde{X}, G, \tilde{\pi})$. Notons*

$$\tilde{X} = \bigsqcup_{(H)} \tilde{X}_{(H)} \quad \text{et} \quad X = \bigsqcup_{(H)} X_{(H)}$$

les stratifications par type d'orbite de \tilde{X} et $X = \tilde{X}/G$. Pour tout type d'orbite (H) , posons

$$\tilde{E}_{(H)} = \bigcup_{x \in \tilde{X}_{(H)}} \tilde{E}_x^{G_x}$$

où pour tout $x \in \tilde{X}$, $\tilde{E}_x^{G_x}$ désigne l'ensemble des éléments de la fibre \tilde{E}_x invariants par l'action de $G_x \subset G$. Alors :

- $\tilde{E}_{(H)}$ est un fibré lisse sur $\tilde{X}_{(H)}$ pour la projection naturelle,
- $\tilde{E}_{(H)}$ passe au quotient en un fibré lisse $\tilde{E}_{(H)}/G$ sur $X_{(H)} = \tilde{X}_{(H)}/G$,

¹On traduit ici le terme anglais *vector orbibundle*.

— $E^{\text{strat}} = \sqcup_{(H)} \tilde{E}_{(H)} / G$ est un espace stratifié.

E^{strat} est appelé fibré vectoriel stratifié associé à l'orbifibré vectoriel E .

Remarque 1.3.17. Attention, au niveau des espaces topologiques sous-jacents, E^{strat} est un sous-espace strict de E . Toutefois sous de bonnes conditions, E^{strat} est dense dans E [Pf03, proposition 2.11].

Tangents d'un orbispace

Revenons au cas de la variété M munie de l'action lisse d'un groupe compact G . Notons $\tilde{\pi} : M \rightarrow M/G$ la projection naturelle. L'espace quotient M/G est muni d'une structure naturelle d'orbispace monocarte : il suffit de considérer la carte d'orbispace $(M/G; M, G, \tilde{\pi})$.

L'action de G sur M induit par différentiation une action de G sur l'espace tangent TM : si on note $\rho_g : x \mapsto g \cdot x$ l'action d'un élément $g \in G$ sur M , son action sur TM est définie par

$$\forall x \in M, \forall X \in T_x M, \quad g \cdot X = d(\rho_g)_x(X) \in T_{g \cdot x} M$$

où $d(\rho_g)_x : T_x M \rightarrow T_{g \cdot x} M$ désigne la différentielle de ρ_g au point $x \in M$. Comme pour M/G , on a une structure naturelle d'orbispace monocarte sur l'espace quotient TM/G .

Définition 1.3.18. On appelle *orbifibré tangent* à M/G l'orbifibré vectoriel

$$\tilde{p} : (TM/G; TM, G, \tilde{\pi}_{TM}) \rightarrow (M/G; M, G, \tilde{\pi})$$

induit par le fibré vectoriel usuel $\tilde{p} : TM \rightarrow M$ et l'action naturelle de G sur TM .

On appelle *fibré tangent stratifié* le fibré vectoriel stratifié TM^{strat} associé à l'orbifibré vectoriel TM .

Remarque 1.3.19. Le fibré tangent stratifié TM^{strat} est dense dans TM [Pf03].

Première partie

Fibres singulières de systèmes Hamiltoniens intégrables

2. Systèmes de pliage sur les espaces de polygones 3D

Dans ce chapitre, on étudie le système de pliage de polygones introduit par Kapovich et Millson sur l'espace $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ des polygones à n côtés de longueurs fixées modulo isométries [KM96]. On montre que pour ce système, les fibres de l'application moment sont des sous-variétés plongées dont on sait donner la structure géométrique, en termes de variétés quotient relativement simples. Ensuite, on montre de plus que ces fibres sont isotropes, c'est-à-dire que la structure symplectique sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ est identiquement nulle le long de ces fibres. En particulier, on a existence de fibres singulières lagrangiennes, c'est-à-dire isotropes et de dimension maximale. Tous les résultats présentés ici sont étendus au cas de longueurs de côtés non-génériques, c'est-à-dire pour lesquelles l'espace $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ n'est plus une variété, en se plaçant au besoin dans la catégorie plus large des orbispaces. Le contenu de ce chapitre peut être retrouvé dans un article indépendant à paraître [Bou15].

2.1. Géométrie des polygones dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3

2.1.1. Définitions et notations

Dans cette section, on commence par rappeler quelques résultats établis par Kapovich et Millson [KM96] puis Hausmann et Knutson [HK97] au sujet de l'espace de configuration des polygones dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Espaces de polygones

Soient $n \geq 4$ un entier et $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ un n -uplet de réels strictement positifs. On s'intéresse ici aux polygones à n côtés de longueurs respectives r_1, \dots, r_n dans \mathbb{R}^3 , que l'on désignera plus simplement par *polygones de taille \underline{r}* . On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^3 et S^2 la sphère unité correspondante. Un polygone de taille \underline{r} est défini par ses sommets $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}^3$, qui doivent vérifier la condition

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \|p_{i+1} - p_i\| = r_i.$$

Remarque 2.1.1. Dans toute cette section, on travaillera souvent implicitement modulo n . Par exemple dans la condition ci-dessus, on prend pour convention $p_{n+1} = p_1$. On utilisera aussi la distance usuelle modulo n donnée par

$$d(i, j) = \min\{|i' - j'| \mid i' \in i + n\mathbb{Z}, j' \in j + n\mathbb{Z}\},$$

qui s'interprète géométriquement comme le nombre minimal de côtés du polygone à franchir pour aller de p_i à p_j .

À translation près, on peut supposer que p_1 est l'origine de \mathbb{R}^3 , et un tel polygone est alors déterminé de manière unique par les directions

$$u^i = \frac{p_{i+1} - p_i}{\|p_{i+1} - p_i\|} \in \mathbb{S}^2$$

de chacun de ses côtés. Ainsi, l'ensemble des polygones de taille \underline{r} (à translation près) s'identifie à la variété lisse (de dimension $2n - 3$)

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} = \{\underline{u} = (u^1, \dots, u^n) \in (\mathbb{S}^2)^n \mid r_1 u^1 + \dots + r_n u^n = 0\}.$$

Par suite, l'ensemble des polygones de taille \underline{r} à isométrie près (encore appelé *espace de configuration des polygones de taille \underline{r}*) s'identifie à l'espace quotient

$$\mathcal{M}_{\underline{r}} = \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} / \mathrm{SO}(3)$$

pour l'action diagonale de $\mathrm{SO}(3)$ sur le produit cartésien $(\mathbb{S}^2)^n$.

Réalisation comme quotient symplectique

Commençons par définir une forme symplectique ω sur $(\mathbb{S}^2)^n$ en posant

$$\omega = r_1 \omega_1 + \dots + r_n \omega_n,$$

où ω_i désigne ici le tiré en arrière par la i -ième projection $(\mathbb{S}^2)^n \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la forme volume¹ $\mathrm{SO}(3)$ -invariante usuelle sur la sphere \mathbb{S}^2 . L'action diagonale du groupe de Lie $\mathrm{SO}(3)$ sur $(\mathbb{S}^2)^n$ est alors Hamiltonienne pour cette forme symplectique ω . Rappelons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3)$ est l'ensemble des matrices de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}, \quad u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

¹ou plutôt forme « aire » dans ce cas

Le choix de cette paramétrisation n'est pas anodin : sous cette forme, on constate que pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^3$, le produit matriciel $M_u v$ est égal au produit vectoriel $u \wedge v$, tandis que le crochet de Lie $[M_u, M_v]$ n'est autre que la matrice $M_{u \wedge v}$. L'application $u \mapsto M_u$ induit ainsi une identification entre $\mathfrak{so}(3)^*$ et $(\mathbb{R}^3)^*$, ce dernier étant ensuite identifié avec \mathbb{R}^3 via la structure euclidienne usuelle. Sous cette identification, l'application moment de l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $(S^2)^n$ est alors donnée par

$$\mu(u^1, \dots, u^n) = r_1 u^1 + \dots + r_n u^n.$$

En particulier, la variété $\tilde{\mathcal{M}}_r$ définie précédemment n'est autre que le niveau $\mu^{-1}(0)$ de l'application moment μ . Il s'ensuit que lorsque l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$ est libre, l'espace de configuration \mathcal{M}_r est un quotient de Marsden–Weinstein —ou quotient symplectique. D'après le théorème 1.3.7, \mathcal{M}_r est alors une variété lisse de dimension $2n - 6$, munie d'une structure symplectique induite par ω (que l'on notera encore ω par abus de notation).

En fait, l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$ est libre si et seulement si le paramètre r vérifie

$$r_1 \varepsilon_1 + \dots + r_n \varepsilon_n \neq 0$$

pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ (voir section 2.1.3 plus loin). On dira qu'un tel r est *générique*. Dans cette section, sauf mention contraire, on supposera toujours que le paramètre r est générique.

Espaces tangents

Notons $T_u \tilde{\mathcal{M}}_r$ l'espace tangent au point $u \in \tilde{\mathcal{M}}_r$ de la variété $\tilde{\mathcal{M}}_r$. Rappelons qu'un vecteur $X \in \mathbb{R}^3$ est tangent à la sphère unité en $u \in S^2$ si et seulement si $\langle u | X \rangle = 0$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 . Ainsi, l'espace tangent $T_u \tilde{\mathcal{M}}_r$ est exactement l'ensemble des n -uplets $\tilde{X} = (\tilde{X}^1, \dots, \tilde{X}^n) \in (\mathbb{R}^3)^n$, tels que $\langle u^i | \tilde{X}^i \rangle = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et vérifiant de plus la condition

$$r_1 \tilde{X}^1 + \dots + r_n \tilde{X}^n = 0$$

(analogue infinitésimal de la condition de fermeture $r_1 u^1 + \dots + r_n u^n = 0$).

Le groupe $\mathrm{SO}(3)$ étant compact, l'orbite $\mathcal{O}(u)$ passant par l'élément $u \in \tilde{\mathcal{M}}_r$ de l'action de $\mathrm{SO}(3)$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$ est une sous-variété fermée de $\tilde{\mathcal{M}}_r$ (théorème 1.3.2). Son espace tangent $T_u \mathcal{O}(u)$ est un sous-espace de $T_u \tilde{\mathcal{M}}_r$, précisément l'ensemble de tous les n -uplets de la forme

$$(x \wedge u^1, \dots, x \wedge u^n), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Définissons une métrique riemannienne sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$ en posant

$$\langle \tilde{X} \mid \tilde{Y} \rangle = r_1 \langle \tilde{X}^1 \mid \tilde{Y}^1 \rangle + \cdots + r_n \langle \tilde{X}^n \mid \tilde{Y}^n \rangle.$$

On peut alors définir de manière unique le supplémentaire orthogonal de $T_{\underline{u}}\mathcal{O}(\underline{u})$ dans $T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_r$, noté $T_{\underline{u}}^{\text{hor}}\tilde{\mathcal{M}}_r$ (espace tangent « horizontal », les orbites de l'action étant vues comme « verticales »). Cette décomposition

$$T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_r = T_{\underline{u}}^{\text{hor}}\tilde{\mathcal{M}}_r \oplus T_{\underline{u}}\mathcal{O}(\underline{u})$$

induit une identification entre l'espace tangent $T_{[u]}\mathcal{M}_r$ à l'espace de configuration de polygones au point $[u] \in \mathcal{M}_r$ et la composante horizontale $T_{\underline{u}}^{\text{hor}}\tilde{\mathcal{M}}_r$.

Le système de pliage de polygones

Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, posons

$$\mu_{i,j}(\underline{u}) = \begin{cases} r_i u^i + r_{i+1} u^{i+1} + \cdots + r_{j-1} u^{j-1} & \text{si } i < j, \\ -\mu_{j,i}(\underline{u}) & \text{si } j < i. \end{cases}$$

Géométriquement, $\mu_{i,j}(\underline{u})$ est le vecteur allant du i -ième au j -ième sommet du polygone \underline{u} . Si $d(i, j) = 1$, c'est un côté du polygone, sinon c'est une diagonale. La longueur de $\mu_{i,j}(\underline{u})$ ne dépend que de la classe $[u]$ du polygone \underline{u} dans \mathcal{M}_r , ainsi l'application lisse $\tilde{f}_{i,j} : \tilde{\mathcal{M}}_r \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\tilde{f}_{i,j}(\underline{u}) = \frac{1}{2} \|\mu_{i,j}([u])\|^2$$

induit une application lisse $f_{i,j} : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}$.

Les définitions et résultats qui suivent ne sont que des généralisations immédiates des énoncés donnés dans [KM96], où les auteurs travaillent uniquement avec des diagonales toutes issues d'un même sommet ($i = 1$ dans les définitions précédentes). Ce cas particulier est parfois mentionné dans la littérature sous le nom *configuration en chenille*.

Proposition 2.1.2 [KM96, lemme 3.5]. *Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, le champ de vecteurs*

$$\tilde{X}_{i,j}(\underline{u}) = (0, \dots, 0, \mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge u^i, \dots, \mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge u^{j-1}, 0, \dots, 0)$$

vérifie la relation

$$d\tilde{f}_{i,j} = \omega(\tilde{X}_{i,j}, \cdot).$$

En particulier, son image $X_{i,j}$ dans le quotient symplectique (\mathcal{M}_r, ω) est le champ de vecteurs Hamiltonien associé à $f_{i,j}$.

Démonstration. Soit $u \in \tilde{\mathcal{M}}_r$ et $\tilde{Y} = (\tilde{Y}^1, \dots, \tilde{Y}^n) \in T_u \mathcal{M}_r$. Par définition de la forme ω sur $(S^2)^n$, on a

$$\omega_u(\tilde{X}_{i,j}(u), \tilde{Y}) = \sum_{k=i}^{j-1} \det(u^k, \mu_{i,j}(u) \wedge u^k, \tilde{Y}^k).$$

On utilise ensuite les identités vectorielles suivantes :

$$\det(a, b, c) = \langle a \mid b \wedge c \rangle \quad \text{et} \quad (a \wedge b) \wedge c = \langle a \mid c \rangle b - \langle b \mid c \rangle a,$$

et le fait que $\langle u^k \mid \tilde{Y}^k \rangle = 0$. On obtient

$$\omega_u(\tilde{X}_{i,j}(u), \tilde{Y}) = \sum_{k=i}^{j-1} r_k \langle \mu_{i,j}(u) \mid \tilde{Y}^k \rangle.$$

D'autre part, comme $\tilde{f}_{i,j}(u) = \frac{1}{2} \langle \mu_{i,j}(u) \mid \mu_{i,j}(u) \rangle$, on a bien

$$d\tilde{f}_{i,j}(u)(\tilde{Y}) = \langle \mu_{i,j}(u) \mid d\mu_{i,j}(u)(\tilde{Y}) \rangle = \langle \mu_{i,j}(u) \mid \sum_{k=i}^{j-1} r_k \tilde{Y}^k \rangle$$

d'où l'égalité annoncée. \square

Géométriquement, quand $\mu_{i,j}(u)$ n'est pas le vecteur nul, le flot du champ de vecteurs $\tilde{X}_{i,j}$ correspond au pliage du polygone u autour de la diagonale $\mu_{i,j}(u)$, avec vitesse angulaire $\|\mu_{i,j}(u)\|$, déplaçant les sommets $i+1$ à $j-1$ de u et fixant les autres sommets. Ainsi, lorsque $d(i, j) > 1$ (c'est-à-dire lorsque $\mu_{i,j}$ est vraiment une diagonale et non pas un côté), le champ de vecteurs $\tilde{X}_{i,j}$ sera appelé *champ de pliage autour de la diagonale $\mu_{i,j}$* . Sur l'ensemble des polygones u tels que $\mu_{i,j}(u) \neq 0$, on peut diviser le champ $\tilde{X}_{i,j}$ par $\|\mu_{i,j}(u)\|$: on obtient alors un nouveau champ de vecteurs $\tilde{B}_{i,j}$, dont le flot correspond au même pliage avec vitesse constante égale à 1. On notera $X_{i,j}$ (res. $B_{i,j}$) l'image de $\tilde{X}_{i,j}$ (res. $\tilde{B}_{i,j}$) par la projection de $T_u \tilde{\mathcal{M}}_r$ sur $T_{[u]} \mathcal{M}_r$. Notons que si $d(i, j) = 1$, c'est-à-dire si $\mu_{i,j}$ est un côté, alors $X_{i,j} = 0$.

On sera aussi amené à considérer plus tard le *champ de pliage inverse*

$$\tilde{X}_{i,j}^{\text{inv}}(u) = -(\mu_{i,j}(u) \wedge u^1, \dots, \mu_{i,j}(u) \wedge u^{i-1}, 0, \dots, 0, \mu_{i,j}(u) \wedge u^j, \mu_{i,j}(u) \wedge u^n),$$

dont le flot correspond au pliage autour de la diagonale $\mu_{i,j}$, laissant fixe la moitié de polygone déplacée par le flot de $\tilde{X}_{i,j}$ (et inversement), et avec vitesse angu-

laire opposée. Bien sûr, $\tilde{X}_{i,j}$ et $\tilde{X}_{i,j}^{\text{inv}}$ ont même image $\underline{X}_{i,j}$ dans le quotient \mathcal{M}_r , formellement cela se traduit par le fait que leur différence

$$\tilde{X}_{i,j} - \tilde{X}_{i,j}^{\text{inv}} = (\mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge u^1, \dots, \mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge u^n)$$

appartient à $T_{\underline{u}}\mathcal{O}(\underline{u})$. Pour $i > j$, on posera $\tilde{X}_{i,j} = \tilde{X}_{j,i}^{\text{inv}}$, en accord avec la définition $\mu_{i,j}(\underline{u}) = -\mu_{j,i}(\underline{u})$.

Deux applications diagonales $\mu_{i,j}$ et $\mu_{k,\ell}$ seront dites *disjointes* si, dans un polygone planaire convexe \underline{u}_0 , les diagonales correspondantes $\mu_{i,j}(\underline{u}_0)$ et $\mu_{k,\ell}(\underline{u}_0)$ n'ont pas de point d'intersection à l'intérieur de \underline{u}_0 (mais elles peuvent éventuellement être issues d'un même sommet). Géométriquement, cela induit que les flots de pliage associés commutent, et donc que les applications $f_{i,j}$ et $f_{k,\ell}$ commutent pour le crochet de Poisson sur \mathcal{M}_r .

Proposition 2.1.3 [KM96, proposition 3.6]. *Si les applications diagonales $\mu_{i,j}$ et $\mu_{k,\ell}$ sont disjointes, alors*

$$\omega(\tilde{X}_{i,j}, \tilde{X}_{k,\ell}) = 0.$$

En particulier, les applications $f_{i,j}$ et $f_{k,\ell}$ commutent pour le crochet de Poisson sur \mathcal{M}_r .

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer $i < j$, $k < \ell$ et $i \leq k$. En notant I l'ensemble des entiers p tels que $i \leq p < j$ et $k \leq p < \ell$, on a pour tout $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_r$:

$$\omega_{\underline{u}}(\tilde{X}_{i,j}(\underline{u}), \tilde{X}_{k,\ell}(\underline{u})) = \sum_{p \in I} r_p \det(u^p, \mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge u^p, \mu_{k,\ell}(\underline{u}) \wedge u^p)$$

Or, à l'aide des identités vectorielles usuelles, on obtient

$$\omega_{\underline{u}}(\tilde{X}_{i,j}(\underline{u}), \tilde{X}_{k,\ell}(\underline{u})) = \sum_{p \in I} r_p \det(u^p, \mu_{i,j}(\underline{u}), \mu_{k,\ell}(\underline{u})) = \det(\mu_I(\underline{u}), \mu_{i,j}(\underline{u}), \mu_{k,\ell}(\underline{u}))$$

où $\mu_I(\underline{u}) = \sum_{p \in I} r_p u^p$. Or, si $\mu_{i,j}$ et $\mu_{k,\ell}$ sont disjointes, alors I est soit vide, soit égal à l'ensemble $\{k, k+1, \dots, \ell-1\}$. Dans le premier cas on a $\mu_I(\underline{u}) = 0$, tandis que dans le second cas, on a $\mu_I = \mu_{k,\ell}$. Dans les deux cas, on obtient bien $\det(\mu_I(\underline{u}), \mu_{i,j}(\underline{u}), \mu_{k,\ell}(\underline{u})) = 0$. \square

Remarquons que la condition pour deux applications diagonales d'être disjointes est purement combinatoire, et ne dépend que des indices i, j, k, ℓ . En particulier, on peut toujours trouver $n-3$ applications diagonales $\mu_{i_1, j_1}, \dots, \mu_{i_{n-3}, j_{n-3}}$ disjointes, c'est à dire autant que la moitié de la dimension de la variété \mathcal{M}_r . On vient de montrer qu'alors les applications $f_{i_1, j_1}, \dots, f_{i_{n-3}, j_{n-3}}$ commutent deux à deux pour le crochet de Poisson, et dans le paragraphe suivant on montrera qu'elles

sont fonctionnellement indépendantes sur un ouvert dense de $\mathcal{M}_{\underline{r}}$. On est donc en mesure d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 2.1.4. *Si $\mu_{i_1,j_1}, \dots, \mu_{i_{n-3},j_{n-3}}$ sont $n - 3$ applications diagonales disjointes sur l'espace de configuration $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ des polygones de taille \underline{r} , alors les applications $f_{i_1,j_1}, \dots, f_{i_{n-3},j_{n-3}}$ définissent un système Hamiltonien complètement intégrable sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$.*

Le système intégrable ci-dessus est appelé *système de pliage sur l'espace des polygones de taille \underline{r}* . Pour alléger les notations, dans ce qui suit on notera parfois $d_k = \mu_{i_k,j_k}$ et $f_k = f_{i_k,j_k}$. Remarquons que pour tout $1 \leq i < j \leq n$, les applications $f_{i,j}$ et $f_{j,i}$ coïncident. Ainsi quand on fixera les applications diagonales d_1, \dots, d_{n-3} , on pourra toujours supposer qu'on a $i_k < j_k$ pour tout $1 \leq k \leq n - 3$. Parfois même, la diagonale d_k sera considérée au signe près, sans incidence sur l'application f_k correspondante.

Points singuliers du système de pliage

Supposons fixées $n - 3$ diagonales disjointes d_1, \dots, d_{n-3} , et soient f_1, \dots, f_{n-3} les applications correspondantes définissant un système de pliage sur l'espace des polygones de taille \underline{r} . On note

$$F = (f_1, \dots, f_{n-3}) : \mathcal{M}_{\underline{r}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$$

l'application moment de ce système. Pour $1 \leq i < j < k \leq n$, on appelle *face entre les sommets i, j et k* le triplet

$$\Delta_{i,j,k} = (\mu_{i,j}, \mu_{j,k}, \mu_{k,i}).$$

On dira que la face est *adaptée au système* si chacune de ses trois composantes correspond soit à un côté $\mu_{p,p+1}$, soit à une des diagonales choisies $\pm d_k$. Les faces adaptées sont précisément celles qui gardent des longueurs de côtés constantes le long des fibres de l'application F . Géométriquement, l'aire de la surface délimitée par $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est donnée par

$$\frac{1}{2} \|\mu_{i,j}(\underline{u}) \wedge \mu_{j,k}(\underline{u})\|.$$

Lorsque cette aire vaut zéro, on dira que la face $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est *dégénérée*.

Théorème 2.1.5 [Cha10, théorème 4.1]. *Une configuration $[\underline{u}] \in \mathcal{M}_{\underline{r}}$ est un point singulier de F si et seulement si il existe une face adaptée $\Delta_{i,j,k}$ telle que $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est dégénérée.*

Démonstration. On verra dans une prochaine sous-section que si toutes les faces adaptées au système sont non-dégénérées en \underline{u} , alors la fibre $F^{-1}(c_1, \dots, c_{n-3})$ contenant $[\underline{u}]$ admet des coordonnées « angle » globales, et donc en particulier $[\underline{u}]$ est une valeur régulière du système. Supposons maintenant qu'une face adaptée $\Delta_{i,j,k}$ est dégénérée en \underline{u} , et montrons qu'alors $x = [\underline{u}]$ est une valeur singulière de F .

- Supposons d'abord que l'une des composantes de $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est le vecteur nul. Alors c'est nécessairement une diagonale $d_p(\underline{u})$ de \underline{u} (les côtés de \underline{u} étant tous de longueurs strictement positives). Mais alors $\tilde{X}_k(\underline{u}) = 0$, et donc $\underline{X}_k(x) = 0$.
- Supposons maintenant que les trois composantes de $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ sont non-nulles. Puisque $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est dégénérée, elles doivent appartenir à une même ligne, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ non-nul et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\mu_{i,j}(\underline{u}) = \alpha v, \quad \mu_{j,k}(\underline{u}) = \beta v, \quad \mu_{k,i}(\underline{u}) = \gamma v.$$

Par hypothèse, α, β, γ sont tous trois non-nuls. Le vecteur

$$\alpha^{-1} \tilde{X}_{i,j}(\underline{u}) + \beta^{-1} \tilde{X}_{j,k}(\underline{u}) + \gamma^{-1} \tilde{X}_{k,i}(\underline{u}) = (v \wedge u^1, \dots, v \wedge u^n)$$

appartient à $T_{\underline{u}}\mathcal{O}(\underline{u})$, donc par projection sur le complémentaire $T_{\underline{u}}^{\text{hor}}\tilde{\mathcal{M}}_r \approx T_x\mathcal{M}_r$ on obtient la relation

$$\alpha^{-1} \underline{X}_{i,j}(x) + \beta^{-1} \underline{X}_{j,k}(x) + \gamma^{-1} \underline{X}_{k,i}(x) = 0$$

où chaque $\underline{X}_{p,q}$ est soit un vecteur de pliage (si $d(p, q) \geq 2$), soit un vecteur nul dans $T_x\mathcal{M}_r$ (si $d(p, q) = 1$).

Dans les deux cas, on constate que la famille $(\underline{X}_1(x), \dots, \underline{X}_{n-3}(x))$ des vecteurs de pliage évalués en x est liée dans $T_x\mathcal{M}_r$. Via l'isomorphisme $\omega_x^b : T_x\mathcal{M}_r \rightarrow T_x^*\mathcal{M}_r$, on en déduit que la famille $(df_1(x), \dots, df_{n-3}(x))$ est liée, c'est-à-dire que x est une valeur singulière de l'application moment $F = (f_1, \dots, f_{n-3})$. \square

2.1.2. Coordonnées action–angle sur un ouvert dense

Dans cette sous-section on suppose encore fixé un système de pliage sur l'ensemble des polygones de taille \underline{r} . Notons \mathcal{M}_r^0 l'ouvert dense formé par l'ensemble des configurations $[\underline{u}] \in \mathcal{M}_r$ telles que toutes les faces adaptées au système sont non-dégénérées en $[\underline{u}]$. Construisons un jeu de variables action-angle sur \mathcal{M}_r^0 .

Pour tout $1 \leq k \leq n-3$, définissons l'application $\ell_k : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\ell_k([u]) = \|d_k(u)\| = 2\sqrt{f_k([u])}.$$

Comme les diagonales d_1, \dots, d_{n-3} sont toujours non-nulles sur \mathcal{M}_r^0 , les fonctions $\ell_1, \dots, \ell_{n-3}$ sont lisses (en fait, elles peuvent s'étendre à des fonctions continues mais non-lisses sur toute la variété \mathcal{M}_r). En appliquant la règle de Leibniz vérifiée par le crochet de Poisson, on remarque que pour tout $1 \leq p, q \leq n$,

$$\{f_p, f_q\} = \left\{ \frac{\ell_p^2}{2}, \frac{\ell_q^2}{2} \right\} = \ell_p \ell_q \{\ell_p, \ell_q\},$$

donc les fonctions $\ell_1, \dots, \ell_{n-3}$ commutent elles aussi deux à deux pour le crochet de Poisson sur \mathcal{M}_r .

Si on note $d_k = \mu_{i,j}$, le champ de vecteurs Hamiltonien associé à l'application ℓ_k n'est autre que le champ de pliage normalisé $\underline{B}_{i,j}$. Le flot $(\psi_k^t)_t$ de ce dernier est donné par :

$$\psi_k^t([u]) = [(u^1, \dots, u^{i-1}, R_{d_k(u)}^t u^i, \dots, R_{d_k(u)}^t u^{j-1}, u^j, \dots, u^n)]$$

où $R_{d_k(u)}^t$ désigne la rotation d'angle $t \in \mathbb{R}$ autour de l'axe $d_k(u) \in \mathbb{R}^3$.

Pour tout $1 \leq k \leq n-3$, la diagonale d_k est un côté d'exactly deux faces adaptées Δ_1 et Δ_2 . Pour $x = [u] \in \tilde{\mathcal{M}}_r$, notons $\hat{\theta}_k(x)$ l'angle diédral entre les deux faces $\Delta_1(u)$ et $\Delta_2(u)$, orienté de sorte que $\hat{\theta}_k \circ \psi_k^t$ diminue lorsque t augmente, $t > 0$. Posons ensuite

$$\theta_k(x) = \pi - \hat{\theta}_k(x)$$

(cette transformation affine étant juste choisie de sorte que $\theta_1(x) = \dots = \theta_{n-3}(x) = 0$ corresponde à un polygone planaire). Par définition, on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\theta_p \circ \psi_q^t(x) = \theta_p(x) + t\delta_{p,q}$$

(où $\delta_{p,q}$ désigne le symbole de Kronecker). En dérivant par rapport à t on obtient $\{\theta_p, \ell_q\} = \delta_{p,q}$. De plus, d'après le lemme 4.5 de [KM96], on a également $\{\theta_p, \theta_q\} = 0$, d'où on déduit le résultat suivant :

Théorème 2.1.6. *Les fonctions $(\ell_1, \dots, \ell_{n-3}, \theta_1, \dots, \theta_{n-3})$ définissent un système de coordonnées action-angle globales sur l'ouvert dense \mathcal{M}_r^0 .*

En particulier si $N = F^{-1}(c_1, \dots, c_n) \subset \mathcal{M}_r^0$ est une fibre sur laquelle aucune face adaptée n'est dégénérée, alors N est difféomorphe à un tore de dimension $n-3$, et tout point $x \in N$ est une valeur régulière de l'application moment $F = (\ell_1^2/2, \dots, \ell_{n-3}^2/2)$.

2.1.3. Extension au cas non-générique

Supposons maintenant que $\underline{r} = (r_1, \dots, r_n)$ n'est pas générique, c'est-à-dire qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tel que

$$\varepsilon_1 r_1 + \dots + \varepsilon_n r_n = 0.$$

Alors il existe des polygones $\underline{u} \in \mathcal{M}_{\underline{r}}$ dont tous les côtés u^1, \dots, u^n appartiennent à une même droite vectorielle dans \mathbb{R}^3 (par exemple, tout polygone de la forme $(\varepsilon_1 u_0, \dots, \varepsilon_n u_0)$ avec $u_0 \in S^2$ fixé). L'existence de tels polygones, dits *dégénérés*, implique que l'action de $G = \text{SO}(3)$ sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ n'est plus libre. En effet, si \underline{u} est un polygone dégénéré dont tous les côtés sont contenus dans la droite vectorielle $L \subset \mathbb{R}^3$, alors son groupe d'isotropie $G_{\underline{u}}$ est le sous-groupe de $\text{SO}(3)$ formé des rotations d'axe L . Par conséquent, l'espace quotient $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ n'est plus muni d'une structure de variété. Toutefois, on peut utiliser le vocabulaire des orbispaces et des espaces stratifiés introduits dans la section 1.3.2.

Proposition 2.1.7. *L'espace quotient $\mathcal{M}_{\underline{r}} = \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}/G$ est un orbispace. Sa stratification par type d'orbite est celle définie par la décomposition*

$$\mathcal{M}_{\underline{r}} = \mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}} \sqcup \mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{d}}$$

où $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$ (res. $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{d}}$) est l'ensemble des configurations de polygones non-dégénérés (res. dégénérés) dans $\mathcal{M}_{\underline{r}}$. Plus précisément :

- $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$ est une variété symplectique de dimension $2n - 6$, topologiquement ouverte et dense dans $\mathcal{M}_{\underline{r}}$,
- $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{d}}$ est un ensemble fini de points.

Démonstration. $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ est évidemment un orbispace monocarte, défini par la carte d'orbispace $(\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}, G, \pi)$, où $\pi : \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} \rightarrow \mathcal{M}_{\underline{r}}$ est la projection naturelle sur l'espace quotient.

Déterminons les types d'orbites de l'action de $G = \text{SO}(3)$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$. Notons $\mathcal{R}(L)$ le sous-groupe des rotations d'axe $L \subset \mathbb{R}^3$. Pour tout $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$, on a :

$$G_{\underline{u}} = \begin{cases} \{\text{id}\} & \text{si } \underline{u} \text{ est non-dégénéré,} \\ \mathcal{R}(\mathbb{R}u^1) & \text{si } \underline{u} \text{ est dégénéré.} \end{cases}$$

Or, étant données deux droites vectorielles L_1 et L_2 dans \mathbb{R}^3 , les sous-groupes $\mathcal{R}(L_1)$ et $\mathcal{R}(L_2)$ sont conjugués dans $\text{SO}(3)$. Il n'y a finalement que deux types d'orbites, correspondant à la décomposition

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} = \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{\text{nd}} \sqcup \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{\text{d}}.$$

En passant au quotient par $\mathrm{SO}(3)$, on obtient la stratification de $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ annoncée. De plus, d'après la proposition 1.3.9 on sait que :

- la strate $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}}$ est difféomorphe à la variété quotient $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}}/\mathrm{SO}(3)$ donnée par l'action libre de $\mathrm{SO}(3)$ sur l'ensemble des polygones non-dégénérés. De plus, le sous-ensemble ouvert

$$S = \{\underline{u} \in (\mathbb{S}^2)^n \mid u^1, \dots, u^n \text{ ne sont pas tous alignés}\} \subset (\mathbb{S}^2)^n$$

est stable par $\mathrm{SO}(3)$. Comme précédemment, $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}}$ est le quotient symplectique $S//_0 \mathrm{SO}(3)$. C'est donc une variété symplectique de dimension $2n - 6$.

- la strate $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{d}}$ est difféomorphe à la variété quotient $M_{\mathcal{R}(L)}/\Gamma_{\underline{u}}$, où \underline{u} est un polygone dégénéré contenu dans la droite L , $M_{\mathcal{R}(L)}$ est l'ensemble des polygones de taille \underline{r} de groupe d'isotropie $\mathcal{R}(L)$, c'est-à-dire l'ensemble des polygones de taille \underline{r} contenus dans la droite L , et $\Gamma_{\underline{u}}$ est un groupe quotient défini à partir de $G_{\underline{u}}$. Or, un polygone est contenu dans la droite $L = \mathbb{R}v$ seulement s'il s'écrit sous la forme

$$(\varepsilon_1 v, \dots, \varepsilon_n v)$$

avec chaque ε_i dans $\{\pm 1\}$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités. Ainsi, l'ensemble $M_{\mathcal{R}(L)}$ et donc son quotient $M_{\mathcal{R}(L)}/\Gamma_{\underline{u}}$ sont tous les deux finis. Ainsi $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{d}}$ est fini et son complémentaire $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}}$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_{\underline{r}}$. \square

Remarque 2.1.8. Cette décomposition est toujours valable dans le cas où \underline{r} est générique : on a alors $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}} = \mathcal{M}_{\underline{r}}$ et $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{d}} = \emptyset$.

Proposition 2.1.9. *Le fibré tangent stratifié $T\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{strat}}$ de $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ est donné par la décomposition*

$$T\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{strat}} = T\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}} \sqcup T\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\mathrm{d}}.$$

Démonstration. Appliquons la proposition 1.3.16.

L'action naturelle d'un élément $g \in \mathrm{SO}(3)$ sur $T\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ obtenue en différentiant son action sur $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ est définie par :

$$\forall \underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}, \forall \tilde{X} \in T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}, \quad g \cdot \tilde{X} = (g\tilde{X}^1, \dots, g\tilde{X}^n) \in T_{g \cdot \underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}.$$

Soit $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$. Déterminons l'ensemble $T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{G_{\underline{u}}}$ des éléments $G_{\underline{u}}$ -invariants de l'espace tangent $T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ au point \underline{u} .

- Si \underline{u} est non-dégénéré, alors $G_{\underline{u}}$ est trivial et donc $T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{G_{\underline{u}}} = T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} = T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{\mathrm{nd}}$,

- Si u est dégénéré, contenu dans la droite L , alors G_u est le sous-groupe $\mathcal{R}(L)$ des rotations d'ordre L . Mais par définition de l'espace tangent, si \tilde{X} appartient à $T_u\tilde{\mathcal{M}}_r$, alors pour tout $1 \leq i \leq n$, \tilde{X}^i est orthogonal à $u^i \in L$. Ainsi, X^i est préservé par une rotation $g \in \mathcal{R}(L)$ si et seulement si $\tilde{X}^i = 0$. On en déduit $T_u\tilde{\mathcal{M}}_r^{G_u} = \{0\} = T_u\tilde{\mathcal{M}}_r^d$.

Ainsi on trouve bien

$$T\mathcal{M}_r^{\text{strat}} = T\tilde{\mathcal{M}}_r^{\text{nd}}/G \sqcup T\tilde{\mathcal{M}}_r^d/G = T\mathcal{M}_r^{\text{nd}} \sqcup T\mathcal{M}_r^d. \quad \square$$

Ainsi, on étend les résultats précédents au cas non-générique en continuant de parler par abus de *système hamiltonien intégrable* sur \mathcal{M}_r . En effet,

- les fonctions $f_1, \dots, f_{n-3} : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}$ sont lisses au sens des orbispaces, puisqu'elles se relèvent en des fonctions lisses sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$,
- elles sont encore fonctionnellement indépendantes sur un ouvert dense de $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$, lui-même dense dans \mathcal{M}_r ,
- la strate maximale $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ est munie d'une structure symplectique ω dont l'expression est identique à celle dans le cas générique, et qu'on peut « étendre » au fibré tangent en définissant

$$\omega_{[u]} : T_{[u]}\mathcal{M}_r^d \times T_{[u]}\mathcal{M}_r^d \rightarrow \mathbb{R}$$

comme la forme nulle (rappelons que $T_{[u]}\mathcal{M}_r^d = \{0\}$),

- les champs de pliage $\tilde{X}_{i,j}$ induisent des sections $\underline{X}_{i,j}$ de l'orbifibré tangent, dont la restriction à la strate symplectique $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ est encore le champ hamiltonien associé à la (restriction de) la fonction $f_{i,j}$ au sens de la géométrie symplectique usuelle.

2.2. Structure des fibres singulières

Dans cette section et les suivantes, le paramètre r n'est pas nécessairement générique. On suppose fixées $n - 3$ diagonales disjointes d_1, \dots, d_{n-3} et on note $F : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$ l'application moment du système de pliage correspondant. On s'intéresse alors à la structure d'une fibre $N = F^{-1}(c_1, \dots, c_{n-3})$.

2.2.1. Étude de la fibre relevée

Posons $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-3}) : \tilde{\mathcal{M}}_r \rightarrow \mathbb{R}^n$ et notons $\pi : \tilde{\mathcal{M}}_r \rightarrow \mathcal{M}_r$ la projection sur le quotient par l'action de $\text{SO}(3)$. Par définition \tilde{F} n'est autre que l'application

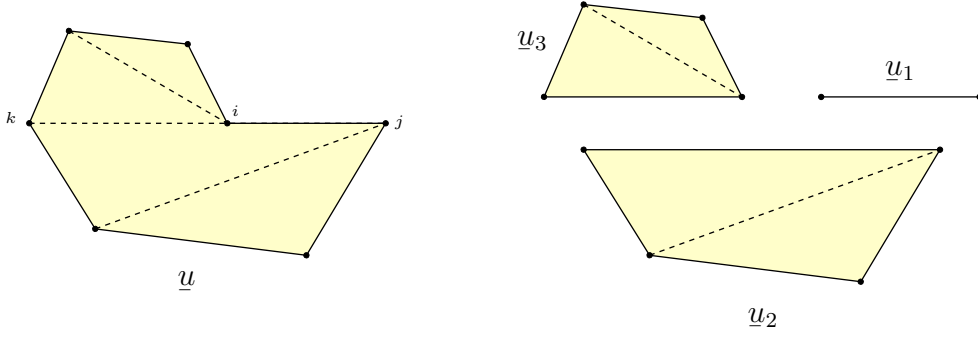


FIGURE 2.1. : Découpage d'un polygone singulier le long d'une face dégénérée

relevée de F , c'est-à-dire telle que $\tilde{F} = F \circ \pi$. Dans cette sous-section, on commence par montrer que la fibre relevée

$$\tilde{N} = \pi^{-1}(N) = \tilde{F}^{-1}(c_1, \dots, c_n)$$

est lisse et on en donne un modèle géométrique.

Cas des fibres prodigues

Comme dans [HK97], on dira qu'un polygone \underline{u} est *prodigue* si aucune des diagonales d_1, \dots, d_{n-3} n'est nulle en \underline{u} . Plus généralement, on dira que la fibre \tilde{N} (et de même N) est prodigue si elle ne contient que des polygones prodigues, c'est-à-dire si c_1, \dots, c_{n-3} sont tous non-nuls.

Supposons que la fibre \tilde{N} est prodigue. Soit $\Delta_{i,j,k}$ une face adaptée au système. Rappelons que, par définition, les côtés de $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ gardent des longueurs ρ_1, ρ_2, ρ_3 constantes lorsque \underline{u} varie le long de la fibre \tilde{N} . Ainsi $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ est dégénérée en un point $\underline{u} \in \tilde{N}$ si et seulement si elle est dégénérée en tout point de \tilde{N} , on dit alors que $\Delta_{i,j,k}$ est dégénérée sur \tilde{N} . Dans ce cas, en découpant un polygone $\underline{u} \in \tilde{N}$ le long de la droite contenant les trois côtés (nécessairement non-nuls) de $\Delta_{i,j,k}(\underline{u})$ comme illustré sur la figure 2.1, on obtient trois polygones :

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = (\mu_{j,i}(\underline{u})^{\text{norm}}, u^i, u^{i+1}, \dots, u^{j-1}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^1} & \underline{r}^1 = (\rho_1, r_i, \dots, r_{j-1}), \\ \underline{u}_2 = (\mu_{k,j}(\underline{u})^{\text{norm}}, u^j, u^{j+1}, \dots, u^{k-1}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^2} & \underline{r}^2 = (\rho_2, r_j, \dots, r_{k-1}), \\ \underline{u}_3 = (\mu_{i,k}(\underline{u})^{\text{norm}}, u^k, \dots, u^n, u^1, \dots, u^{i-1}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^3} & \underline{r}^3 = (\rho_3, r_k, \dots, r_n, r_1, \dots, r_{i-1}), \end{cases}$$

où v^{norm} désigne le normalisé $v^{\text{norm}} = v/\|v\| \in \mathbb{S}^2$ d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ non-nul. Notons qu'après ce découpage, on peut obtenir des « digones », c'est-à-dire des polygones à deux côtés. Du fait que les diagonales d_1, \dots, d_{n-3} sont disjointes, elles induisent sur chaque espace $\mathcal{M}_{\underline{r}^p}$ un système de pliage d'application moment F_p

tel que \underline{u}_p reste sur une même fibre \tilde{N}_p lorsque \tilde{u} parcourt \tilde{N} . Dans le cas où $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^p}$ est un espace de digones ou de triangles, on prend par convention $\tilde{N}_p = \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^p}$ et on considérera que \tilde{N}_p est une « fibre régulière » bien que l'on n'ait pas de système de pliage ni d'application F_p sur $\mathcal{M}_{\underline{r}^p}$. On a alors bien une fibre lisse, puisque $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}^p}$ est une variété lisse difféomorphe à S^2 (espace de digones ou de triangles dégénérés) ou $SO(3)$ (espace de triangles non-dégénérés). Finalement, en répétant de tels découpages du polygone, l'étude de la fibre \tilde{N} se ramène à l'étude de fibres régulières, donc connues. C'est la clé de la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 2.2.1. *Soit \tilde{N} une fibre relevée du système de pliage. Si \tilde{N} est pro-digue, alors on a un isomorphisme de G -variétés entre \tilde{N} muni de la restriction de l'action de $SO(3)$ sur $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ et l'un des deux modèles suivants :*

- $M_1 = S^2$ la sphère unité de \mathbb{R}^3 munie de l'action usuelle de $SO(3)$,
- $M_2 = SO(3) \times \mathbb{T}^k$ avec $0 \leq k \leq n - 3$ où l'action de $SO(3)$ se fait par multiplication à gauche sur la première composante.

De plus, en notant $\varphi : M_i \rightarrow \tilde{N}$ l'isomorphisme, on peut toujours faire les hypothèses suivantes :

- dans le premier cas, que $\underline{u} = \varphi(v)$ a pour première arête $u^1 = v \in S^2$,
- dans le second cas, en notant

$$\varphi^{-1}(\underline{u}) = (f(\underline{u}), \tilde{\theta}_1(\underline{u}), \dots, \tilde{\theta}_k(\underline{u})),$$

que les applications $\tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_k$ soient les relèvements sur \tilde{N} de certaines coordonnées angle sur $N \subset \mathcal{M}_{\underline{r}}^0$.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $n = |\underline{r}|$. Si n vaut 2 ou 3, rappelons que par convention $\tilde{N} = \mathcal{M}_{\underline{r}}$.

- Si $n = 2$, alors l'isomorphisme est $v \in S^2 \mapsto (v, -v)$.
- Si $n = 3$ et \underline{r} est non générique, c'est-à-dire $\varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \varepsilon_3 r_3 = 0$, l'isomorphisme est $v \in S^2 \mapsto (\varepsilon_1 v, \varepsilon_2 v, \varepsilon_3 v)$. Quitte à multiplier tous les ε_i par -1 , on peut supposer $\varepsilon_1 = 1$.
- Si $n = 3$ et \underline{r} est générique, alors pour tout polygone $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ on a la relation

$$r_3^2 = \| -u^3 \|^2 = \| u^1 + u^2 \|^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \langle u^1 \mid u^2 \rangle,$$

d'où $\langle u^1 \mid u^2 \rangle$ est égal à une constante c indépendante de \underline{u} . D'après le théorème de Cauchy-Schwarz, on a $c \leq 1$, le cas d'égalité correspondant au cas où u^1 et u^2 sont colinéaires, qui ne peut être réalisé ici car la relation

$r_3^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = (r_1 + r_2)^2$ contredirait la généralité de \underline{r} . Ainsi u^1 et u^2 forment une famille libre de \mathbb{R}^3 , qu'on peut rendre orthonormale via le procédé de Gram–Schmidt en remplaçant par exemple u^2 par

$$v = (cu^1 - u^2)/\sqrt{1 - c^2}.$$

L'isomorphisme annoncé entre $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ et $\mathrm{SO}(3)$ est alors donné par l'application qui associe le polygone \underline{u} à la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base orthonormale directe $(u^1, v, u^1 \wedge v)$.

Supposons maintenant $n \geq 4$ et que pour tout système de pliage sur un espace de configuration de polygones de taille \underline{r}' avec $|\underline{r}'| < n$, toutes les fibres relevées sont des variétés isomorphes à l'un des deux modèles donnés. Soit \tilde{N} une fibre relevée.

- Si N est une fibre régulière du système, alors par le théorème de Liouville N est isomorphe à un tore \mathbb{T}^{n-3} . De plus l'action de $\mathrm{SO}(3)$ est libre sur \tilde{N} , et on obtient finalement un isomorphisme avec le second modèle $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{T}^{n-3}$.
- Sinon, au moins une face adaptée est dégénérée sur \tilde{N} et on peut appliquer le découpage précédent. On obtient une bijection entre \tilde{N} et l'ensemble

$$M = \{(u_1, u_2, u_3) \in \tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2 \times \tilde{N}_3 \mid u_2^1 = \varepsilon_2 u_1^1 \text{ et } u_3^1 = \varepsilon_3 u_1^1\}$$

où $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$ sont définis par la relation de colinéarité entre les trois côtés de la face $\Delta_{i,j,k}$. Par hypothèse de récurrence, les trois fibres relevées $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$ sont des variétés chacune isomorphe à l'un des deux modèles donnés, et M est alors une sous-variété de $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2 \times \tilde{N}_3$ munie d'une action (diagonale) de $\mathrm{SO}(3)$. De plus, l'application $M \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ de « recollement » des morceaux découpés est un plongement d'image \tilde{N} qui entrelace les actions de $\mathrm{SO}(3)$ sur M et \tilde{N} et préserve les structures symplectiques. Reste donc à montrer que M est isomorphe à l'un des deux modèles.

Si $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$ sont toutes les trois isomorphes à S^2 alors $\varphi : v \in S^2 \rightarrow (\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)) \in \tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2 \times \tilde{N}_3$ définit un plongement $\mathrm{SO}(3)$ -invariant d'image M , d'où M est isomorphe au premier modèle M_1 .

Supposons maintenant qu'au moins une des trois fibres $\tilde{N}_1, \tilde{N}_2, \tilde{N}_3$ n'est pas une sphère S^2 . Soit \tilde{N}_i une fibre isomorphe à un modèle $G_i = \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{T}^{k_i}$. On définit une action ρ_i de \mathbb{T}^1 sur \tilde{N}_i par la rotation de tout le polygone \underline{u}_i autour de son premier côté u_i^1 . L'image de cette action dans $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ après recollement coïncide avec l'action d'un champ de pliage. On obtient ainsi une action de $H_i = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^{k_i} = \mathbb{T}^{k_i+1}$ sur \tilde{N}_i . Combinant ces trois actions, on obtient finalement une action de $\mathrm{SO}(3) \times H_1 \times H_2 \times H_3$ sur $M \subset \tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2 \times \tilde{N}_3$, où l'action de $\mathrm{SO}(3)$ est l'action diagonale (et $H_i = \{1\}$ lorsque $\tilde{N}_i \approx S^2$).

En raison de la colinéarité de u_1^1 , u_2^1 et u_3^1 l'une des rotations ρ_i définies précédemment est redondante, on peut alors supprimer une composante \mathbb{T}^1 de l'un des \tilde{N}_i , et on obtient alors une action libre et encore transitive de $\mathrm{SO}(3) \times \mathbb{T}^k$ sur M , qui donne l'isomorphisme annoncé. \square

Cas général

Supposons maintenant que l'une des diagonales choisies $d_k = \mu_{i,j}$ s'annule sur \tilde{N} . Alors tout polygone $\underline{u} \in \tilde{\mathcal{M}}_r$ peut être vu comme le bouquet de deux polygones

$$\begin{cases} \underline{u}_1 = (u^i, \dots, u^{j-1}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{r^1}, & \underline{r}^1 = (r_i, \dots, r_{j-1}), \\ \underline{u}_2 = (u^1, \dots, u^{i-1}, u^j, \dots, u^n) \in \tilde{\mathcal{M}}_{r^2}, & \underline{r}^2 = (r_1, \dots, r_{i-1}, r_j, \dots, r_n). \end{cases}$$

Comme précédemment, les diagonales d_1, \dots, d_{n-3} étant disjointes, elles induisent également deux systèmes de pliages sur les espaces de configurations de polygones \mathcal{M}_{r^1} et \mathcal{M}_{r^2} tels que lorsque \underline{u} parcourt la fibre \tilde{N} , le couple (u_1, u_2) décrit exactement un produit de fibres $\tilde{N}_1 \times \tilde{N}_2$. En itérant cette décomposition pour chaque diagonale s'annulant sur \tilde{N} , on se ramène finalement à l'étude d'un produit de fibres prodigues, dont a déjà déterminé la structure dans le paragraphe précédent. On obtient alors le résultat suivant.

Proposition 2.2.2. *Toute fibre \tilde{N} du système de pliage est isomorphe en tant que G -variété à*

$$M_{(p,q,r)} = \underbrace{\mathrm{SO}(3) \times \dots \times \mathrm{SO}(3)}_{p \text{ facteurs}} \times \underbrace{\mathbb{T}^1 \times \dots \times \mathbb{T}^1}_{q \text{ facteurs}} \times \underbrace{\mathbb{S}^2 \times \dots \times \mathbb{S}^2}_{r \text{ facteurs}} \quad (2.2.3)$$

muni de l'action de $\mathrm{SO}(3)$ par

- *multiplication à gauche sur chacune des p premières composantes,*
- *action linéaire usuelle sur chacune des r dernières composantes.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 2.2.1, par récurrence sur le nombre de côtés $n = |\underline{r}|$. \square

Ce résultat s'interprète géométriquement de la manière suivante, illustrée sur la figure 2.2. Tout polygone \underline{u} dans une fibre \tilde{N} peut s'interpréter comme un bouquet de polygones prodigues autour de l'origine (éventuellement un seul). Si l'un de ces polygones est dégénéré, c'est-à-dire contenu dans une droite, alors il est paramétré par sa direction uniquement : c'est l'une des composantes \mathbb{S}^2 . Sinon, on décrit le polygone par l'orientation de l'une de ses faces non-dégénérées (choisie une fois

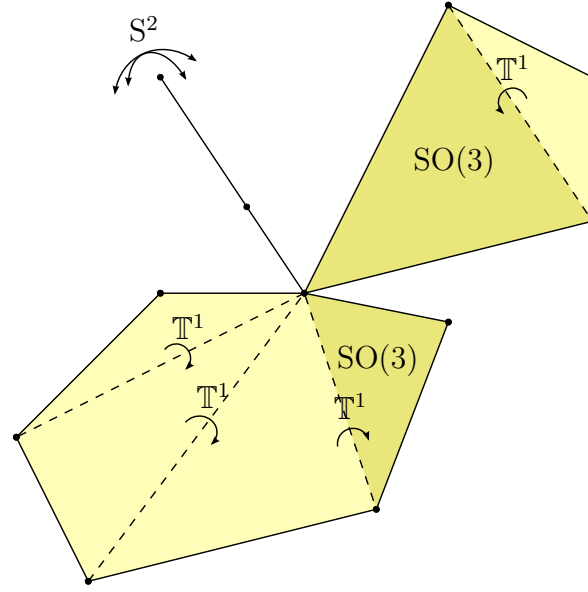


FIGURE 2.2. : Interprétation des différents types de composantes d'une fibre du système de pliage

pour toute pour tout polygone dans la fibre), et par les angles entre ses faces non-dégénérées voisines : ce sont respectivement les composantes $SO(3)$ et \mathbb{T}^1 dans le produit ci-dessus.

Notons que pour différents paramètres (p, q, r) , les modèles ne sont pas isomorphes entre eux, ainsi la fibre N caractérise de manière unique le triplet (p, q, r) . De plus, par construction, une composante torique ne peut apparaître sans composante de type $SO(3)$, c'est-à-dire que si $p = 0$ alors $q = 0$.

Lien avec les variétés toriques

Les fibres du système de pliage de polygones sur \mathcal{M}_r sont uniquement déterminées par les longueurs r_1, \dots, r_n des côtés du polygone et les longueurs $\ell_1, \dots, \ell_{n-3}$ imposées aux différentes diagonales. Ces quantités doivent vérifier toute une famille d'inégalités triangulaires, une pour chaque face adaptée au système. Ainsi, l'application moment singulière $F_{\text{sing}} = (\ell_1, \dots, \ell_{n-3})$ a son image contenue dans un polytope convexe défini par ces inégalités. En fait, on peut montrer que l'image de F_{sing} est exactement ce polytope. Dans [KY02] Kamiyama et Yoshida se sont intéressés à la construction de variétés toriques associées à de tels polytopes, et leur construction utilise la décomposition en bouquet de polygones décrite précédemment. Ils introduisent la relation d'équivalence suivante sur $\tilde{\mathcal{M}}_r$: $\underline{u} \sim \underline{v}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. \underline{u} et \underline{v} sont dans la même fibre de \tilde{F}_{sing} ,
2. si on note $\underline{u} = (u_1, \dots, u_q)$ et $\underline{v} = (v_1, \dots, v_q)$ les décompositions respectives de \underline{u} et \underline{v} en bouquets de polygones prodigues, alors il existe $(g_1, \dots, g_q) \in \text{SO}(3)^q$ tel que $v_i = g \cdot u_i$ pour tout $1 \leq i \leq q$.

Ils montrent alors que le quotient $V = \tilde{\mathcal{M}}_r / \sim$ pour cette relation d'équivalence est une variété torique symplectique dont l'application moment a même image que F_{sing} . De plus, on a une projection naturelle $p : \mathcal{M}_r \rightarrow V$ qui commute avec les applications moment.

Soit \tilde{N} une fibre relevée du système de pliage. D'après la proposition 2.2.2, cette fibre est isomorphe à un modèle de la forme :

$$M_{(p,q,r)} = \text{SO}(3)^p \times \mathbb{T}^q \times (\mathbb{S}^2)^r.$$

$M_{(p,q,r)}$ est muni d'une action naturelle de $\text{SO}(3)^{p+r}$, où chaque composante de $\text{SO}(3)^{p+r}$ agit de manière standard sur une composante de type $\text{SO}(3)$ ou de type \mathbb{S}^2 . Les éléments de $p(N) \subset V$ sont alors précisément les orbites pour cette action.

2.2.2. Fibres dans l'espace de configuration

On cherche maintenant à déterminer la structure de la fibre N dans l'espace quotient \mathcal{M}_r . On vient de voir que la décomposition en bouquet de polygones prodigues donne un isomorphisme entre la fibre relevée \tilde{N} et un modèle $M_{(p,q,r)}$. Si $p \geq 1$, c'est que géométriquement l'un des polygones du bouquet est non-dégénéré, et son orientation est alors paramétrée par une composante $\text{SO}(3)$. Considérer les polygones de \tilde{N} à isométrie près revient à fixer un fois pour toutes l'orientation de l'un des polygones non-dégénérés le long de \tilde{N} , et le quotient $N = \tilde{N}/\text{SO}(3)$ est alors isomorphe à un modèle de la forme $M_{(p-1,q,r)}$. En revanche, si $p = 0$, c'est-à-dire si les polygones appartenant à \tilde{N} se décomposent en bouquets de polygones tous dégénérés, alors la structure du quotient est moins évidente. Ainsi, il convient de distinguer deux cas : on dira que N est

- de type I si \tilde{N} est isomorphe à un modèle de la forme $M_{(p,q,r)}$ avec $p \geq 1$,
- de type II si \tilde{N} est isomorphe à un modèle de la forme $M_{(0,0,r)}$.

Rappelons que si $p = 0$, alors on a également $q = 0$, ainsi les deux cas ci-dessus sont les seuls possibles.

Théorème 2.2.4. *Soit N une fibre d'un système de pliage sur \mathcal{M}_r .*

- *Si N est de type I, alors c'est une variété plongée de $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ difféomorphe à un produit cartésien de la forme*

$$\text{SO}(3)^p \times \mathbb{T}^q \times (\mathbb{S}^2)^r$$

avec $p, q, r \geq 0$.

- Si N est de type II, alors c'est un orbispace de stratification associée

$$N = N^{\text{nd}} \sqcup N^{\text{d}}$$

où $N^{\text{nd}} = N \cap \mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ (res. $N^{\text{d}} = N \cap \mathcal{M}_r^{\text{d}}$) est une variété plongée de $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ (res. de \mathcal{M}_r^{d}) formée des polygones non-dégénérés (res. des polygones dégénérés) dans la fibre N .

Démonstration. D'après la proposition 2.2.2, \tilde{N} est isomorphe en tant que G -variété à un modèle $M_{(p,q,r)}$.

- Si N est de type I, c'est-à-dire si $p \geq 1$, remarquons déjà qu'alors l'action de $\text{SO}(3)$ sur $M_{(p,q,r)}$ (res. sur \tilde{N}) est libre. Ainsi $\tilde{N} \rightarrow N$ et $M_{p,q,r} \rightarrow M_{p,q,r}/\text{SO}(3)$ sont des G -fibrés principaux isomorphes. Considérons l'application $\varphi : M_{(p,q,r)} \rightarrow M_{(p-1,q,r)}$ définie par :

$$\varphi(\underline{g}, \underline{\theta}, \underline{v}) = (g_1^{-1} \cdot (g_2, \dots, g_p), \underline{\theta}, g_1^{-1} \cdot \underline{v})$$

pour tout $(\underline{g}, \underline{\theta}, \underline{v}) \in M_{(p,q,r)}$. On vérifie aisément que φ est lisse et $\text{SO}(3)$ -invariante, et que l'application quotient induit un difféomorphisme entre $M_{(p,q,r)}/\text{SO}(3)$ et $M_{(p-1,q,r)}$.

- Si N est de type II, c'est-à-dire si $p = 0$, alors l'action de $\text{SO}(3)$ sur $M_{(0,0,r)} = (\mathbb{S}^2)^r$ n'est plus libre. Par exemple, toute rotation $g \in \text{SO}(3)$ non-triviale d'axe $v_0 \in \mathbb{S}^2$ vérifie $g \cdot (v_0, \dots, v_0) = (v_0, \dots, v_0)$. Toutefois, N est encore l'espace quotient correspondant à l'action lisse d'un groupe compact sur une variété, c'est donc un orbispace. De plus, la décomposition de $\tilde{\mathcal{M}}_r$ par type d'isotropie induit une décomposition de la fibre relevée

$$\tilde{N} = \tilde{N}^{\text{nd}} \sqcup \tilde{N}^{\text{d}}$$

par type d'isotropie, où la composante \tilde{N}^{nd} est définie comme l'intersection de $\tilde{\mathcal{M}}_r^{\text{nd}}$ avec \tilde{N} (et de même pour \tilde{N}^{d}). En prenant le quotient de chaque composante par $\text{SO}(3)$, on obtient le résultat annoncé. \square

Remarque 2.2.5. Un système de pliage sur \mathcal{M}_r n'admet des fibres de type II que si \underline{r} est non-générique. En effet, soit \underline{u} un polygone dans une fibre

$$\tilde{N} \approx M_{0,0,r} = (\mathbb{S}^2)^r.$$

Cela signifie que \underline{u} se décompose en un bouquet de polygones $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_r$ tous dégénérés. Quitte à faire pivoter convenablement chacun de ces polygones, on peut

supposer qu'ils sont tous le long d'une même ligne $\mathbb{R}v_0$, $v_0 \in S^2$. Ainsi le polygone \underline{u} est lui-même dégénéré, et donc \underline{r} est nécessairement non-générique.

Remarque 2.2.6. Notons $\tilde{\iota} : \tilde{N} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ l'inclusion de la fibre relevée dans l'espace de polygones ambiant. Cette application est évidemment $SO(3)$ -invariante et induit donc une application $\iota : N \rightarrow \mathcal{M}_{\underline{r}}$. Le théorème 2.2.4 indique que ι est un plongement dans la « bonne » catégorie à considérer : la catégorie des variétés lisses si N est de type I, ou la catégorie des orbispaces sinon.

2.3. Isotropie des fibres du système

Dans cette section, on montre que toute fibre N d'un système de pliage sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ est isotrope², c'est-à-dire que la structure symplectique ω sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ s'annule le long des vecteurs tangents à N .

Rappelons qu'en tout généralité on a la stratification suivante :

$$\mathcal{M}_{\underline{r}} = \mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}} \sqcup \mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{d}}$$

où $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$ est une variété symplectique lisse dense dans $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ tandis que $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{d}}$ est une union finie de points (vide lorsque \underline{r} est générique). Si la fibre N n'est pas une variété (c'est-à-dire si elle intersecte les deux strates dans la décomposition ci-dessus), on dira qu'elle est *isotrope* si la sous-variété $N^{\text{nd}} = N \cap \mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$ est isotrope.

Finalement, on cherche à démontrer la propriété suivante :

$$\forall x \in N^{\text{nd}}, \forall X, Y \in T_x N^{\text{nd}}, \omega_x(X, Y) = 0.$$

Dans un souci de clarté, on se permettra dans toute cette section l'abus suivant : on désignera par N (resp. \tilde{N} , $\mathcal{M}_{\underline{r}}$, $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$) la variété N^{nd} (resp. \tilde{N}^{nd} , $\mathcal{M}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$, $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}^{\text{nd}}$) en travaillant comme si \underline{r} était générique.

2.3.1. Générateurs de l'espace tangent

Commençons par exhiber pour tout polygone $\underline{u} \in \tilde{N}$ une famille de vecteurs qui engendrent l'espace tangent $T_{\underline{u}} \tilde{N}$.

Pour tous $1 \leq i < j \leq n$ et $v \in \mathbb{R}^3$, posons

$$\tilde{Y}_{i,j}^v(\underline{u}) = (0, \dots, 0, v \wedge u^i, \dots, v \wedge u^{j-1}, 0, \dots, 0).$$

²La notion d'isotropie définie ci-dessus, propre à la géométrie symplectique, ne doit pas être confondue avec la notion d'isotropie en théorie des groupes que nous avons utilisée dans les sections précédentes.

Notons que pour que $\tilde{Y}_{i,j}^v(\underline{u})$ définisse correctement un vecteur tangent de $T_{\underline{u}}\tilde{\mathcal{M}}_r$, il faut que la condition

$$v \wedge \mu_{i,j}(\underline{u}) = 0$$

soit satisfaite. Cela se produit notamment dans deux cas particuliers. D'abord lorsque $v = \mu_{i,j}(\underline{u})$, et dans ce cas le vecteur $\tilde{Y}_{i,j}^v(\underline{u})$ n'est autre que la valeur en \underline{u} du champ de pliage $\tilde{X}_{i,j}(\underline{u})$ autour de la diagonale $\mu_{i,j}$. Ensuite, lorsque $\mu_{i,j}(\underline{u}) = 0$, et dans ce cas n'importe quel vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ convient. En particulier si sur une fibre non-prodigue on a la décomposition $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q)$ en bouquet de polygones prodigues, alors on peut définir pour chaque composante \underline{u}_k un tel vecteur $\tilde{Y}_{\underline{u}_k}^v(\underline{u})$, qui s'interprète géométriquement (via son flot) comme la rotation de la composante \underline{u}_k autour de l'axe $v \in \mathbb{R}^3$, les autres composantes restant fixes.

Lemme 2.3.1. *Soit \tilde{N} une fibre relevée d'un système de pliage sur \mathcal{M}_r . Notons $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m)$ la décomposition en bouquet de polygones prodigues sur \tilde{N} (avec éventuellement $m = 1$ si \tilde{N} est déjà une fibre prodigue).*

Si pour tout $1 \leq j \leq m$, on note $(v_{j,1}, v_{j,2}, v_{j,3})$ une base de \mathbb{R}^3 , alors pour tout $\underline{u} \in \tilde{N}$, la famille

$$\{\tilde{X}_i, \tilde{Y}_{\underline{u}_j}^{v_{j,k}} \mid 1 \leq i \leq n-3, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq 3\}$$

engendre l'espace tangent $T_{\underline{u}}\tilde{N}$ (en tant qu'espace vectoriel).

Démonstration. Comme on l'a vu dans la section précédente, la décomposition en bouquet de polygones prodigues induit un difféomorphisme entre \tilde{N} et un produit $\tilde{N}_1 \times \dots \times \tilde{N}_m$ de fibres de systèmes plus petits, vérifiant chacune

$$\tilde{N}_j \approx M_j = \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \text{si } \underline{u}_j \text{ est dégénéré,} \\ \mathrm{SO}(3) \times \mathbb{T}^{k_i} & \text{si } \underline{u}_j \text{ est non-dégénéré.} \end{cases}$$

Soit $\varphi^j : M_j \rightarrow \tilde{N}_j$ le difféomorphisme donné par la proposition 2.2.1. On note $\varphi_*^j : T_{(\varphi^j)^{-1}(\underline{u}_j)}M_j \rightarrow T_{\underline{u}_j}\tilde{N}_j$ la différentielle de φ^j au point $(\varphi^j)^{-1}(\underline{u}_j)$.

Dans le premier cas, $\varphi^j : \mathbb{S}^2 \rightarrow \tilde{N}_j$ est de la forme

$$\varphi^j(v) = (\epsilon_1 v_1, \dots, \epsilon_{n_j} v)$$

avec $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n_j}) \in \{\pm 1\}^{n_j}$. Pour tout $v \in \mathbb{S}^2$, l'espace tangent

$$T_v \mathbb{S}^2 = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v \mid X \rangle = 0\}$$

peut être identifié avec l'ensemble $\{X \wedge v \mid X \in \mathbb{R}^3\}$, lui même identifié avec le quotient de l'ensemble \mathbb{R}^3 par la relation d'équivalence \sim définie par $X \sim X'$ si

$X - X'$ est un multiple de v . Sous cette identification, $\varphi_*^j : \mathbb{R}^3 \rightarrow T_{\underline{u}_j} \tilde{N}_j$ est défini par

$$\varphi_*^j(X) = X \wedge \underline{u}_j = (X \wedge u_j^1, \dots, X \wedge u_j^{n_j}).$$

Dans le second cas, on peut supposer $\varphi^j(\text{id}, 0) = \underline{u}_j$. On a alors $\varphi_*^j : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{k_j} \rightarrow T_{\underline{u}_j} \tilde{N}_j$ via l'identification précédente $T_{\text{id}} \text{SO}(3) = \mathfrak{so}(3) \approx \mathbb{R}^3$. Remarquant que

$$\varphi^j(g, 0, \dots, 0) = g \cdot \underline{u}_j,$$

on voit que sous cette identification on a $\varphi_*^j(X, 0) = \langle X \mid \underline{u}_j \rangle$ pour tout $X \in \mathbb{R}^3$. De plus, par hypothèse, l'image $\varphi_*^j(0, e_\ell)$ d'un vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{k_j} par φ_*^j est un vecteur de pliage (à vitesse unité) sur \tilde{N}_j .

Finalement, notons $\pi_i : \tilde{N} \rightarrow \tilde{N}_i$ la projection de \tilde{N} sur la composante \tilde{N}_i , et soit le difféomorphisme

$$\varphi = (\varphi^1 \circ \pi_1, \dots, \varphi^m \circ \pi_m) : \tilde{N} \rightarrow M_{(p,q,r)}$$

qui identifie \tilde{N} avec un modèle $M_{(p,q,r)}$. Alors l'application φ^{-1} identifie

- un vecteur tangent à une composante \mathbb{T}^1 à un vecteur de pliage \tilde{X} ,
- un vecteur tangent à une composante $\text{SO}(3)$ ou S^2 à un vecteur $\tilde{Y}_{\underline{u}_j}^v$, $v \in \mathbb{R}^3$.

De plus si $v = \alpha_1 v_{j,1} + \alpha_2 v_{j,2} + \alpha_3 v_{j,3}$, on vérifie immédiatement que

$$\tilde{Y}_{i,j}^v = \alpha_1 \tilde{Y}_{\underline{u}_j}^{v_{j,1}} + \alpha_2 \tilde{Y}_{\underline{u}_j}^{v_{j,2}} + \alpha_3 \tilde{Y}_{\underline{u}_j}^{v_{j,3}}.$$

Ainsi les images par ϕ des éléments de la famille donnée engendrent tout l'espace $T_{\varphi(\underline{u})} M_{(p,q,r)}$, c'est donc qu'eux même engendrent tout l'espace $T_{\underline{u}} \tilde{N}$. \square

2.3.2. Cas des fibres prodigues

Supposons d'abord que la fibre \tilde{N} est prodigue, et montrons que \tilde{N} est isotrope par récurrence sur le nombre de faces adaptées qui sont dégénérées sur \tilde{N} . Pour cela, on approche les polygones de \tilde{N} par des familles de polygones ayant tous un nombre strictement inférieur de faces dégénérées. L'existence de telles familles est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.3.2. *Soit N une fibre prodigue de F . Supposons que l'une des faces adaptées $\Delta_{i,j,k}$ est dégénérée sur N .*

Alors pour tout polygone $\underline{u}_0 \in \tilde{N}$, il existe :

- un voisinage I de zéro dans \mathbb{R} ,
- une famille $(\underline{u}_t)_{t \in I}$ de polygones dans \mathbb{R}^3 ,
- une famille $(\underline{r}_t)_{t \in I}$ de tailles de polygones

tels que les propriétés suivantes sont vérifiées :

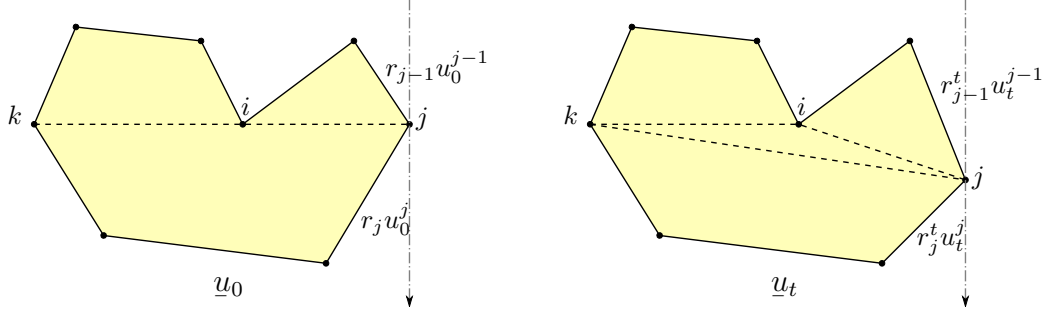


FIGURE 2.3. : Approximation d'un polygone possédant une face dégénérée

- (2.3.2.a) pour tout $t \in I$, le polygone \underline{u}_t est de taille \underline{r}_t ,
- (2.3.2.b) \underline{r}_t tend vers \underline{r} dans \mathbb{R}^n lorsque t tend vers 0,
- (2.3.2.c) \underline{u}_t tend vers \underline{u}_0 dans $(S^2)^n$ lorsque t tend vers 0,
- (2.3.2.d) pour tout $t \in I$, $t \neq 0$, la face $\Delta_{i,j,k}(\underline{u}_t)$ est non-dégénérée,
- (2.3.2.e) si une face adaptée $\Delta_{a,b,c}(\underline{u}_0)$ est non-dégénérée, alors $\Delta_{a,b,c}(\underline{u}_t)$ est non-dégénérée pour tout $t \in I$,
- (2.3.2.f) pour tout $t \in I$, \underline{u}_t est un polygone prodigue.

De plus, si on note F_t le système de pliage sur $\mathcal{M}_{\underline{r}_t}$ induit par le même choix de diagonale que sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$, et \tilde{N}_t la fibre relevée contenant \underline{u}_t , alors pour tout $\tilde{X}_0 \in T_{\underline{u}_0}\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ il existe une famille $(\tilde{X}_t)_{t \in I}$ dans $(\mathbb{R}^3)^n$ telle que :

- (2.3.2.g) pour tout $t \in I$, \tilde{X}_t appartient à $T_{\underline{u}_t}\tilde{N}_t$,
- (2.3.2.h) \tilde{X}_t tend vers \tilde{X}_0 dans $(\mathbb{R}^3)^n$ lorsque t tend vers 0.

Démonstration. Construisons explicitement ces familles. On fixe d'abord $x \in S^2$ un vecteur orthogonal à la diagonale $\mu_{i,k}(\underline{u}_0)$ puis on pose

$$\underline{u}_t = \left(u_0^1, \dots, u_0^{j-2}, \frac{r_{j-1}u_0^{j-1} + tx}{\|r_{j-1}u_0^{j-1} + tx\|}, \frac{r_j u_0^j - tx}{\|r_j u_0^j - tx\|}, u_0^{j+1}, \dots, u_0^n \right)$$

et

$$\underline{r}_t = (r_1, \dots, r_{j-2}, \|r_{j-1}u_0^{j-1} + tx\|, \|r_j u_0^j - tx\|, r_{j+1}, \dots, r_n).$$

Géométriquement, le polygone \underline{u}_t est obtenu en déplaçant le j -ième sommet de \underline{u}_0 dans la direction $x \in S^2$, comme illustré sur la figure 2.3.

Les propriétés (2.3.2.a), (2.3.2.b) et (2.3.2.c) sont immédiates. Pour la propriété (2.3.2.d), remarquons que pour tout $t \neq 0$, $\mu_{i,k}(\underline{u}_t) = \mu_{i,k}(\underline{u}_0)$, mais

$$\mu_{i,j}(\underline{u}_t) = \mu_{i,j}(\underline{u}_0) + tx.$$

Ainsi, $\|\mu_{i,j}(\underline{u}_t) \wedge \mu_{i,k}(\underline{u}_t)\| = t\|x \wedge \mu_{i,k}(\underline{u}_0)\|$ est non-nul pour $t \neq 0$ puisqu'on a choisi $x \in S^2$ orthogonal à $\mu_{i,k}(\underline{u}_0) \neq 0$. Autrement dit la face $\Delta_{i,j,k}(\underline{u}_t)$ est d'aire non-nulle. Pour la propriété (2.3.2.e), on utilise le fait que la fonction $t \mapsto \|\mu_{a,b}(\underline{u}_t) \wedge \mu_{b,c}(\underline{u}_t)\|$ est continue, ainsi si la face $\Delta_{a,b,c}(\underline{u}_t)$ est d'aire non-nulle en $t = 0$, alors elle reste d'aire non-nulle pour tout t dans un voisinage de zéro. De même, la continuité des fonctions $t \mapsto \mu_{p,q}(\underline{u}_t)$ prouve la propriété (2.3.2.f).

Enfin, reste à montrer qu'on peut bien approcher n'importe quel vecteur \tilde{X}_0 par une famille de vecteurs satisfaisant les propriétés (2.3.2.g) et (2.3.2.h). Il suffit de montrer le résultat pour tout générateur donné par le lemme 2.3.1. Si $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_{i,j}(\underline{u}_0)$ est un champ de pliage, on pose simplement $\tilde{X}_t = \tilde{X}_{i,j}(\underline{u}_t)$ le champ de pliage du système sur \mathcal{M}_{r_t} . De même si $\tilde{X}_0 = \tilde{Y}_{1,n}^v(\underline{u}_0)$ pour un certain $v \in \mathbb{R}^3$, il suffit de se convaincre que $\tilde{X}_t = \tilde{Y}_{1,n}^v(\underline{u}_t)$ est bien défini pour tout $t \in I$ et satisfait les propriétés données. \square

Proposition 2.3.3. *Toute fibre prodigue d'un système de pliage sur \mathcal{M}_r est une sous-variété isotrope.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le nombre m de faces dégénérées le long de la fibre \tilde{N} . Si $m = 0$, alors la fibre étant prodigue et aucune face n'étant dégénérée, N est une fibre régulière du système, donc en particulier une sous-variété isotrope (théorème 1.2.6).

Supposons maintenant que $m > 0$ faces sont dégénérées le long de la fibre N , et soit $\Delta_{i,j,k}$ l'une d'entre elles. Pour $\underline{u}_0 \in \tilde{N}$ fixé, soit $(\underline{u}_t)_{t \in I}$ l'approximation de \underline{u}_0 donnée par le lemme 2.3.2. D'après la propriété (2.3.2.f), la fibre N_t contenant $[\underline{u}_t]$ est encore une fibre prodigue. De plus d'après les propriétés (2.3.2.d) et (2.3.2.e), le polygone \underline{u}_t a au plus $m - 1$ faces dégénérées pour $t \neq 0$. Ainsi par hypothèse de récurrence, la fibre N_t est une sous-variété isotrope de \mathcal{M}_{r_t} .

Soit \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 deux vecteurs de $T_{\underline{u}_0}\tilde{N}$, et $(\tilde{X}_{1,t})_t, (\tilde{X}_{2,t})_t$ leurs approximations, données également par le lemme 2.3.2. Notons ω^t la forme symplectique définie sur $(S^2)^n$ induisant une forme symplectique (encore notée ω^t) sur \mathcal{M}_{r_t} . Rappelons que par définition de ω^t on a

$$\omega_{\underline{u}_t}^t(\tilde{X}_{1,t}, \tilde{X}_{2,t}) = \sum_{i=1}^n r_i^t \det(u_t^i, \tilde{X}_{1,t}^i, \tilde{X}_{2,t}^i).$$

Cette expression est clairement continue en t , d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega_{[\underline{u}_t]}^t(\tilde{X}_{1,t}, \tilde{X}_{2,t}) = \omega_{[\underline{u}_0]}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2).$$

En utilisant les propriétés (2.3.2.g) et (2.3.2.h) et le fait que N_t est isotrope pour $t \neq 0$, on obtient que $\omega_{[\underline{u}_0]}(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2) = 0$. Le résultat étant vrai pour tout $\underline{u}_t \in \tilde{N}$ et $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in T_{\underline{u}_0}\tilde{N}$, on obtient que la fibre N est isotrope. \square

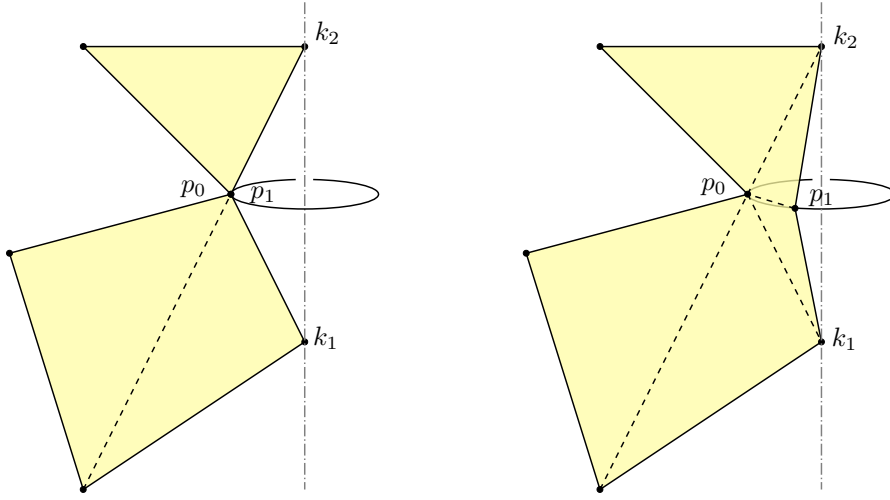


FIGURE 2.4. : Approximation d'un polygone non prodigue

2.3.3. Cas général

On se place maintenant dans le cas général, en supposant que la fibre N n'est pas prodigue, c'est-à-dire qu'au moins une des diagonales d_1, \dots, d_{n-3} définissant le système de pliage sur \mathcal{M}_r s'annule le long de N . On va procéder par récurrence sur le nombre de ces diagonales s'annulant, en utilisant comme précédemment des approximations convenablement choisies des polygones de N .

Lemme 2.3.4. *Supposons que la diagonale d_k s'annule sur N . Alors il existe un sous-ensemble dense $\tilde{S} \subset \tilde{N}$ de la fibre relevée tel que pour tout $\underline{u}_0 \in \tilde{S}$, il existe*

- *un voisinage I de zéro dans \mathbb{R} ,*
- *une famille $(\underline{u}_t)_{t \in I}$ dans $\tilde{\mathcal{M}}_r$*

satisfaisant les propriétés suivantes :

- (2.3.4.a) *\underline{u}_t tend vers \underline{u}_0 dans $\tilde{\mathcal{M}}_r$ lorsque t tend vers 0,*
- (2.3.4.b) *pour tout $t \in I$, $t \neq 0$, on a $d_k(\underline{u}_t) \neq 0$,*
- (2.3.4.c) *pour tout $1 \leq \ell \leq n - 3$, si $d_\ell(\underline{u}_0) \neq 0$, alors $d_\ell(\underline{u}_t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.*

De plus, si \tilde{N}_t désigne la fibre relevée de F contenant \underline{u}_t , alors pour tout $\tilde{X}_0 \in T_{\underline{u}_0}\tilde{N}$, il existe une famille $(\tilde{X}_t)_{t \in I}$ dans $T\tilde{\mathcal{M}}_r$ telle que :

- (2.3.4.d) *pour tout $t \in I$, \tilde{X}_t appartient à $T_{\underline{u}_t}\tilde{N}_t$,*
- (2.3.4.e) *\tilde{X}_t tend vers \tilde{X}_0 dans $T\mathcal{M}_r$ lorsque t tend vers 0.*

Démonstration. Soit $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_q)$ la décomposition en bouquet de polygones prodigues sur \tilde{N} . Quitte à effectuer une permutation cyclique des sommets du polygone (c'est-à-dire une permutation cyclique des composantes de $(S^2)^n$ et $(\mathbb{R}_{>0})^n$ dans la définition de \mathcal{M}_r), on peut supposer que cette décomposition est donnée par une suite

$$1 = p_0 < p_1 < \dots < p_q = n + 1$$

telle que pour tout $1 \leq i \leq q$, on a $\underline{u}_i = (u^{p_{i-1}}, \dots, u^{p_i-1})$. Toujours quitte à permuter, on peut également supposer que la diagonale s'annulant sur N est $d_k = \mu_{p_0, p_1}$.

Cette diagonale d_k est un côté d'exactly deux faces adaptées Δ_{p_0, k_1, p_1} et Δ_{p_0, p_1, k'_2} . Si $k'_2 = p_j$ pour un certain $j \geq 2$, alors $\mu_{p_1, k'_2} = \mu_{p_1, p_j}$ est un côté d'exactly deux faces adaptées Δ_{p_0, p_1, k'_2} et Δ_{p_1, k'_2, p_j} , avec $p_1 < k'_2 < p_j$. On peut encore avoir $k'_2 = p_{j'}$ pour un certain $2 \leq j' < j$, auquel cas on itère le raisonnement précédent autant de fois que nécessaire et après un nombre fini d'étapes on obtient

$$1 < k_1 < p_1 < k_2$$

tels que pour tout $0 \leq j \leq q$, $k_2 \neq p_j$, et $\Delta_{p_1, k_2, p_{j_0}}$ est une face adaptée pour un certain $0 \leq j_0 \leq q$.

Soit $\tilde{S} = \{\underline{u} \in \tilde{N} \mid \mu_{k_1, p_1}(\underline{u}) \wedge \mu_{p_1, k_2}(\underline{u}) \neq 0\}$. Fixons un élément $\underline{u}_0 \in \tilde{S}$ et posons

$$\underline{u}_t = (u_0^1, \dots, u_0^{k_1-1}, R^t u_0^{k_1}, \dots, R^t u_0^{k_2-1}, u_0^{k_2}, \dots, u_0^n)$$

où R^t est la rotation d'angle t autour de l'axe

$$\mu_{k_1, k_2}(\underline{u}_0) = r_{k_1} u_0^{k_1} + \dots + r_{k_2-1} u_0^{k_2-1}.$$

Géométriquement, \underline{u}_t est obtenu en pliant le polygone \underline{u}_0 autour de la diagonale $\mu_{k_1, k_2}(\underline{u}_0)$, comme illustré sur la figure 2.4. De cette définition, on déduit immédiatement la propriété (2.3.4.a). La propriété (2.3.4.c) est une conséquence de la continuité des applications $t \mapsto d_\ell(\underline{u}_t)$.

Pour tout $1 \leq p < q \leq n$, on a la relation

$$\mu_{p, q}(\underline{u}_t) = \mu_{p, q}(\underline{u}_0) + \sum_{i \in I(p, q)} r_i (R^t u_0^i - u_0^i)$$

où $I(p, q) = \{p, \dots, q-1\} \cap \{k_1, \dots, k_2-1\}$. En particulier,

$$\mu_{p_0, p_1}(\underline{u}_t) = 0 + \sum_{i=k_1}^{p_1-1} r_i (R^t u_0^i - u_0^i) = R^t \mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_0) - \mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_0).$$

Or comme \underline{u}_0 appartient à \tilde{S} , $\mu_{k_1, k_2}(\underline{u}_0)$ l'axe de la rotation R^t n'est pas colinéaire

à $\mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_0)$, d'où la propriété (2.3.4.b).

Maintenant pour l'approximation des vecteurs tangents, il suffit de montrer qu'elle est réalisable sur l'ensemble des générateurs donnés par le lemme 2.3.1. Pour un vecteur de pliage $\tilde{X}_\ell(\underline{u}_0)$, on vérifie aisément que la famille $(\tilde{X}_\ell(\underline{u}_t))_t$ satisfait les propriétés (2.3.4.d) et (2.3.4.e). Pour les autres générateurs, remarquons d'abord que pour tout $t \neq 0$, la décomposition en bouquet de polygones prodigues sur N_t est donnée par la suite

$$1 = p_0 < p_2 < p_3 < \cdots < p_q = n + 1.$$

En particulier pour tout $2 < j \leq q$ et $v \in \mathbb{R}^3$ le champ $\tilde{Y}_{p_{j-1}, p_j}^v$ est bien défini sur \tilde{N}_t et on peut prendre $(\tilde{Y}_{p_{j-1}, p_j}^v(\underline{u}_t))_t$ comme approximation de $\tilde{Y}_{p_{j-1}, p_j}^v(\underline{u}_0)$. Reste à approximer les champs de la forme $\tilde{Y}_{p_0, p_1}^v(\underline{u}_0)$ et $\tilde{Y}_{p_1, p_2}^v(\underline{u}_0)$, avec $v \in \mathbb{R}^3$.

Pour $v_1 = \mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_0)$ et $v_2 = \mu_{p_1, k_2}(\underline{u}_0)$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{p_0, p_1}^{v_1}(\underline{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{Y}_{k_1, p_1}^{\mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) - \tilde{Y}_{p_0, k_1}^{\mu_{p_0, k_1}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) \\ \tilde{Y}_{p_1, p_2}^{v_1}(\underline{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{Y}_{k_1, p_2}^{\mu_{k_1, p_2}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) - \tilde{Y}_{k_1, p_1}^{\mu_{k_1, p_1}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) \\ \tilde{Y}_{p_0, p_1}^{v_2}(\underline{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{Y}_{p_0, k_2}^{\mu_{p_0, k_2}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) - \tilde{Y}_{p_1, k_2}^{\mu_{p_1, k_2}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) \\ \tilde{Y}_{p_1, p_2}^{v_2}(\underline{u}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{Y}_{p_1, k_2}^{\mu_{p_1, k_2}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) - \tilde{Y}_{k_2, p_2}^{\mu_{k_2, p_2}(\underline{u}_t)}(\underline{u}_t) \end{aligned}$$

où à chaque fois on peut vérifier que le second membre définit bien un vecteur de $T_{\underline{u}_t} \tilde{N}_t$.

Par définition de \tilde{S} , v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, et avec

$$v_3 = \frac{v_1 \wedge v_2}{\|v_1 \wedge v_2\|}$$

ils forment une base de \mathbb{R}^3 . Notons que par le calcul précédent,

$$\begin{cases} \mu_{p_0, p_1}(\underline{u}_t) = R^t v_1 - v_1, \\ \mu_{p_1, p_2}(\underline{u}_t) = R^t v_2 - v_2. \end{cases}$$

Ainsi pour $i = 1, 2$, on a $v_i \wedge \mu_{k_1, k_2}(\underline{u}_0) = v_i \wedge (v_1 + v_2) = \pm v_3$ d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R^t v_i - v_i}{\|R^t v_i - v_i\|} = \pm v_3,$$

c'est-à-dire que les vecteurs de pliages normalisés $B_{p_0, p_1}(\underline{u}_t)$ et $B_{p_1, p_2}(\underline{u}_t)$ convergent vers $\pm \tilde{Y}_{p_0, p_1}^{v_3}(\underline{u}_0)$ et $\pm \tilde{Y}_{p_1, p_2}^{v_3}(\underline{u}_0)$. \square

On peut donc démontrer maintenant le résultat principal de cette section :

Théorème 2.3.5. *Toute fibre d'un système de pliage sur \mathcal{M}_r est isotrope.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 2.3.3, en raisonnant cette fois par récurrence sur le nombre m de diagonales nulles le long de la fibre. Pour $m = 0$, le résultat est vrai précisément d'après la proposition 2.3.3. Pour l'hérédité, on utilise les approximations fournies par le lemme 2.3.4 pour montrer que

$$\omega_{[u]}(Z_1, Z_2) = 0$$

pour tout $u \in \tilde{S}$ et $Z_1, Z_2 \in T_{[u]}\mathcal{M}_r$, puis on étend le résultat N par densité. \square

Remarquons qu'on a en particulier existence de fibres singulières lagrangiennes.

Corollaire 2.3.6. *Soit N une fibre singulière d'un système de pliage $F : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$. Notons comme précédemment N^{nd} la strate maximale de N . Soit*

$$\tilde{N} \approx \tilde{N}_1 \times \cdots \times \tilde{N}_q$$

la décomposition de \tilde{N} en produit de fibres prodigues de systèmes plus petits.

Alors N^{nd} est une variété lagrangienne dans $\mathcal{M}_r^{\text{nd}}$ si et seulement si chaque composante \tilde{N}_i est :

- *soit un espace de digones $\tilde{\mathcal{M}}_{(a,a)}$,*
- *soit un espace de triangles non-dégénérés $\tilde{\mathcal{M}}_{(a,b,c)}$,*
- *soit une fibre régulière relevée.*

Démonstration. D'après le théorème 2.3.5, N^{nd} est toujours une variété isotrope. Elle est donc lagrangienne si et seulement si elle a dimension maximale, à savoir $n - 3$.

Rappelons que, d'une part, $\tilde{N}_i \subset \tilde{\mathcal{M}}_{r_i}$ est difféomorphe à :

$$\begin{cases} \mathbb{S}^2 & \text{si } \tilde{N}_i \text{ est un espace de digones,} \\ \text{SO}(3) & \text{si } \tilde{N}_i \text{ est un espace de triangles non-dégénérés,} \\ \text{SO}(3) \times \mathbb{T}^{n_i-3} & \text{si } |r_i| \geq 4 \text{ et } \tilde{N}_i \text{ est une fibre régulière.} \end{cases}$$

Dans chacun des cas ci-dessus, la dimension de \tilde{N}_i est exactement égale au nombre $n_i = |r_i|$ de côtés des polygones dans \tilde{N}_i . Ainsi, si chacune des composantes est d'une des formes ci-dessus, alors leur produit \tilde{N} a dimension $n_1 + \cdots + n_q = n$. Par suite, le quotient $N^{\text{nd}} = \tilde{N}^{\text{nd}}/\text{SO}(3)$ a dimension $n - 3$.

D'autre part, \tilde{N}_i est difféomorphe à

$$\begin{cases} \mathbb{S}^2 & \text{si } \tilde{N}_i \text{ est un espace de polygones dégénérés à } n_i \geq 3 \text{ cotés,} \\ \text{SO}(3) \times \mathbb{T}^{p_i-3} & \text{avec } 0 \leq p_i < n_i \text{ si } \tilde{N}_i \text{ est une fibre prodigue singulière.} \end{cases}$$

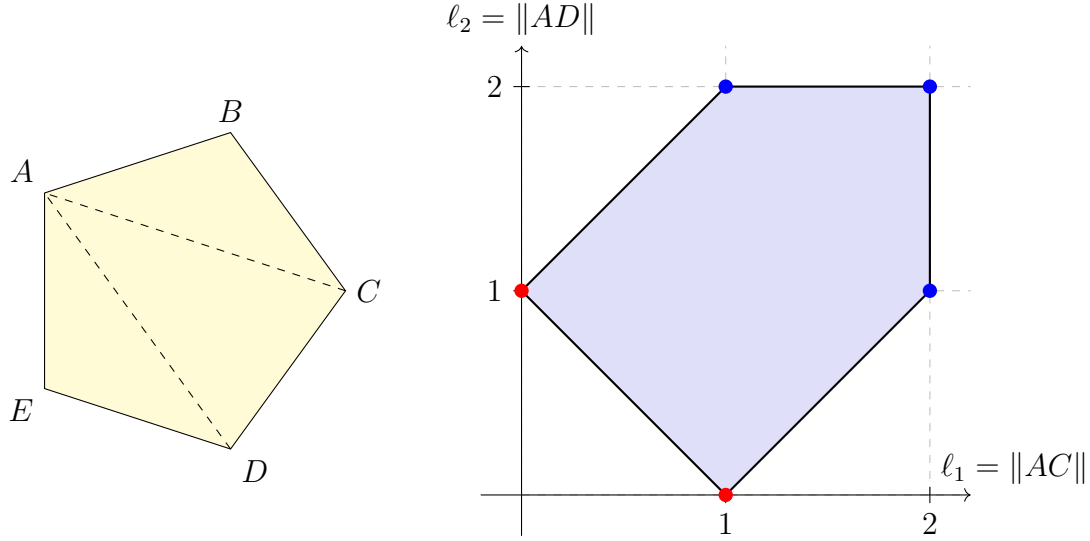


FIGURE 2.5. : Image de l'application moment singulière pour le système de pliage de pentagones réguliers.

Dans les deux cas, on a $\dim \tilde{N}_i < n_i$. Il suffit donc qu'une seule des composantes soit de cette forme pour que \tilde{N} soit de dimension strictement inférieure à n , et donc que N^{nd} ne soit pas lagrangienne. \square

Exemple 2.3.7. Prenons $n = 5$ et $\underline{r} = (1, \dots, 1)$. Dans un pentagone planaire convexe, deux diagonales disjointes sont nécessairement issues d'un même sommet. Sans perte de généralité, on peut donc supposer

$$d_1(\underline{u}) = u^1 + u^2, \quad d_2(\underline{u}) = u^1 + u^2 + u^3.$$

Considérons non pas l'application moment F , mais l'application moment « singulière »

$$F_{\text{sing}} = (\ell_1, \ell_2) : \mathcal{M}_r \rightarrow \mathbb{R}^2$$

(où $\ell_i = \|d_i\|$) qui a exactement les mêmes fibres. Son image dans \mathbb{R}^2 est le polygone rationnel convexe Δ représenté sur la figure 2.5. Les valeurs singulières de F_{sing} sont exactement celles sur la frontière de Δ . La préimage d'une valeur à l'intérieur d'une arête de Δ est une fibre singulière difféomorphe au tore $\mathbb{T}^1 = S^1$ de dimension 1. Pour les fibres singulières correspondant aux sommets de Δ , la situation est résumée dans le tableau 2.6. En particulier, on a deux cas de figures. Trois de ces fibres sont réduites à un point (valeurs en bleu sur la figure 2.5). Mais, de manière plus surprenante, les deux autres fibres sont difféomorphes à la sphère S^2 (valeurs

en rouge). En particulier, ce sont des sous-variétés lagrangiennes, puisque isotropes et de dimension maximale. ■

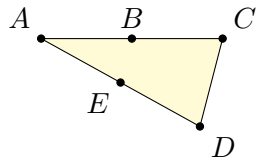
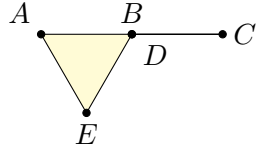
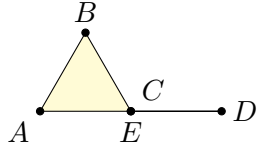
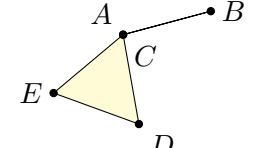
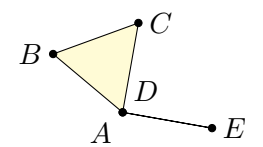
Valeur de c	Structure de la fibre $F_{\text{red}}^{-1}(c)$	Exemple de polygone dans $F_{\text{red}}^{-1}(c)$
$(2, 2)$	$\{\text{point}\}$	
$(2, 1)$	$\{\text{point}\}$	
$(1, 2)$	$\{\text{point}\}$	
$(0, 1)$	S^2	
$(1, 0)$	S^2	

FIGURE 2.6. : Fibres singulières du système de pliage de pentagones réguliers

3. Le système de Gelfand–Cetlin sur les orbites coadjointes de $U(n)$

Dans ce chapitre, on étudie le système de Gelfand–Cetlin, qui est un système hamiltonien intégrable construit par Guillemin et Sternberg sur les orbites coadjointes du groupe de Lie $U(n)$, au moyen de la méthode dite de Thimm [GS83b]. Les résultats présentés ici s’inscrivent dans un travail en collaboration en cours avec E. Miranda et N.T. Zung. L’idée principale de l’étude est d’identifier les matrices d’une orbite coadjointe de $U(n)$ avec des ellipsoïdes de \mathbb{C}^n . Via cette identification, les intégrales premières du système de Gelfand–Cetlin s’interprètent géométriquement comme les fonctions qui à un ellipsoïde \mathcal{E} dans \mathbb{C}^n associent les longueurs des demi-axes de toute une suite d’ellipsoïdes de dimension croissante dans \mathcal{E} . On montre alors que les fibres de l’application moment du système de Gelfand–Cetlin sont des sous-variétés difféomorphes aux groupes de symétrie de ces « drapeaux d’ellipsoïdes », qu’on aura préalablement étudiés. En particulier, on termine par quelques exemples de fibres pour lesquelles on calcule explicitement ces groupes de symétrie.

3.1. Définition du système

3.1.1. Orbites coadjointes sur $\mathfrak{u}(n)^*$

On considère le groupe

$$U(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid MM^* = I_n = M^*M\}$$

des matrices unitaires de taille n , où $M^* = {}^t\bar{M}$ désigne l’adjoint de la matrice complexe M . C’est un groupe de Lie (réel) de dimension n^2 . Son algèbre de Lie est l’espace vectoriel réel

$$\mathfrak{u}(n) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid H^* = -H\}$$

muni du commutateur usuel $[H_1, H_2] = H_1H_2 - H_2H_1$. Cette algèbre est munie d'une forme bilinéaire non-dégénérée

$$(H_1, H_2) \mapsto \text{Tr}(H_1H_2).$$

On utilise d'ordinaire une telle forme pour identifier l'algèbre $\mathfrak{u}(n)$ à son dual $\mathfrak{u}(n)^*$. Toutefois, on introduira ici une multiplication par i en remarquant qu'une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appartient à l'algèbre $\mathfrak{u}(n)$ si et seulement si la matrice iH appartient à l'espace

$$\mathcal{H}(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^* = A\}$$

des matrices hermitiennes de taille n . Introduisons donc plutôt l'isomorphisme $\varphi : \mathcal{H}(n) \rightarrow \mathfrak{u}(n)^*$ défini pour tout $A \in \mathcal{H}(n)$ par

$$\varphi(A) : H \mapsto -i \text{Tr}(AH).$$

Par invariance de la trace par transposition et commutation, on vérifie que $\overline{-i \text{Tr}(AH)} = i \text{Tr}(A^*H^*) = -i \text{Tr}(AH)$, donc la forme $\varphi(A)$ est bien à valeurs réelles.

Rappelons qu'on a une *représentation adjointe* du groupe de Lie $U(n)$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{u}(n)$. Celle-ci est définie par

$$\text{Ad} : \begin{cases} U(n) & \longrightarrow & \text{Aut}(\mathfrak{u}(n)) \\ g & \longmapsto & \text{Ad}_g : (H \mapsto gHg^{-1}) \end{cases}$$

Elle induit une *représentation coadjointe* Ad^* de $U(n)$ sur $\mathfrak{u}(n)^*$ définie par $\text{Ad}_g^* = (\text{Ad}_{g^{-1}})^*$, c'est-à-dire

$$\text{Ad}_g^*(\alpha)(H) = \alpha(\text{Ad}_{g^{-1}}(H)) = \alpha(g^{-1}Hg)$$

pour tous $g \in U(n)$, $H \in \mathfrak{u}(n)$, $\alpha \in \mathfrak{u}(n)^*$. Or, si $\alpha = \varphi(A)$, $A \in \mathcal{H}(n)$, toujours par commutativité sous la trace on a

$$\varphi(A)(g^{-1}Hg) = -i \text{Tr}(Ag^{-1}Hg) = -i \text{Tr}(gAg^{-1}H) = \varphi(gAg^{-1})(H),$$

autrement dit $\text{Ad}_g^*(\varphi(A)) = \varphi(gAg^{-1})$. Ainsi, l'isomorphisme φ^{-1} transforme l'action coadjointe sur $\mathfrak{u}(n)^*$ en l'action de $U(n)$ sur $\mathcal{H}(n)$ par conjugaison.

Ainsi, une *orbite coadjointe* sur $\mathfrak{u}(n)^*$ (c'est-à-dire une orbite pour l'action coadjointe) est l'image par φ d'une orbite

$$\mathcal{O}(A) = \{gAg^{-1} \mid g \in U(n)\}, \quad A \in \mathcal{H}(n).$$

Or, rappelons le résultat suivant d'algèbre linéaire sur les matrices hermitiennes : toute matrice $A \in \mathcal{H}(n)$ est diagonalisable en base orthonormée (pour le produit

hermitien usuel sur \mathbb{C}^n) et ses valeurs propres sont réelles. C'est-à-dire qu'il existe $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ des valeurs réelles et $P \in \mathrm{U}(n)$ une matrice unitaire telles que $A = PD_{\underline{\lambda}}P^{-1}$, où $D_{\underline{\lambda}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ainsi, les orbites coadjointes sont exactement les images par φ des ensembles de la forme

$$\mathcal{O}(\underline{\lambda}) = \{PD_{\underline{\lambda}}P^{-1} \mid P \in \mathrm{U}(n)\}, \quad \underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Dans toute la suite de ce chapitre, on identifiera $\mathfrak{u}(n)^*$ et $\mathcal{H}(n)$, et par orbite coadjointe on désignera les ensembles $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ définis ci-dessus, où sans perte de généralité on suppose $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Soit $\underline{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ fixé et $A \in \mathcal{O}(\underline{\lambda})$. Notons $p_A : \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ la projection naturelle sur l'orbite, donné par $p_A(P) = PAP^{-1}$ pour tout $P \in \mathrm{U}(n)$. La différentielle de cette application en l'élément neutre $I_n \in \mathrm{U}(n)$ s'écrit

$$dp_A(I_n) : \begin{cases} \mathfrak{u}(n) & \longrightarrow & T_A\mathcal{O}(\underline{\lambda}) \\ H & \longmapsto & HA + AH^* = [H, A] \end{cases}$$

et permet d'identifier l'espace tangent $T_A\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ avec l'ensemble $\{[H, A] \mid H \in \mathfrak{u}(n)\}$ (remarquons toutefois que deux matrices $H_1, H_2 \in \mathfrak{u}(n)$ distinctes peuvent donner le même élément $[H_1, A] = [H_2, A] \in T_A\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, précisément si H_1 et H_2 appartiennent à l'algèbre de Lie du stabilisateur G_A de A pour l'action de $\mathrm{U}(n)$ par conjugaison). La forme de Kirillov–Kostant–Souriau usuelle ω sur l'orbite coadjointe prend alors la forme (toujours via l'isomorphisme φ) :

$$\omega_A([H_1, A], [H_2, A]) = i \mathrm{Tr}(A[H_1, H_2]).$$

(voir [Aud12], section II.1.d). Dans ce chapitre, c'est toujours cette forme symplectique que l'on considérera sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$.

Terminons avec le résultat suivant, dont on rappelle ici la preuve.

Proposition 3.1.1 [Aud12, proposition II.1.15]. *Supposons que $\underline{\lambda}$ consiste en p valeurs propres différentes de multiplicités respectives n_1, \dots, n_p , c'est-à-dire que :*

$$\underbrace{\lambda_1 = \dots = \lambda_{d_1}}_{n_1} > \underbrace{\lambda_{d_1+1} = \dots = \lambda_{d_2}}_{n_2} > \dots > \underbrace{\lambda_{d_{p-1}+1} = \dots = \lambda_n}_{n_p}.$$

Alors l'orbite $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est difféomorphe à la variété homogène $\mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(\underline{\lambda})$ où

$$\mathrm{U}(\underline{\lambda}) \approx \mathrm{U}(n_1) \times \dots \times \mathrm{U}(n_p)$$

est le sous-groupe des matrices unitaires diagonales par blocs, dont les blocs diagonaux sont de tailles respectives n_1, \dots, n_p .

Démonstration. Par définition, $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est l'orbite de $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour

l'action lisse du groupe compact $U(n)$ sur $\mathcal{H}(n)$ par conjugaison. D'après le théorème 1.3.2, c'est donc une sous-variété plongée de $\mathcal{H}(n)$ diffeomorphe au quotient de $U(n)$ par le stabilisateur $\text{Stab}(D)$ de D . Reste à montrer que ce stabilisateur est exactement le sous-groupe $U(\underline{\lambda})$.

Soit $P \in U(n)$. Alors

$$P \in \text{Stab}(D) \iff PDP^{-1} = D \iff PD = DP,$$

autrement dit la matrice P appartient au stabilisateur de D si et seulement si elle commute avec D . Or, P commute avec D si et seulement si elle préserve les sous-espaces propres de D (voir lemme 3.3.1 plus loin), ce qui dans ce cas est équivalent à demander que P soit diagonale par blocs, avec des blocs de tailles n_1, \dots, n_p respectivement. Bien sûr, P est unitaire si et seulement si chaque bloc est unitaire, ce qui fournit le diffeomorphisme $U(\underline{\lambda}) \approx U(n_1) \times \dots \times U(n_p)$ annoncé. \square

On en déduit notamment que l'orbite $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est de dimension $n^2 - (n_1^2 + \dots + n_p^2)$. En particulier, on dira que le spectre $\underline{\lambda}$ est *générique* si toutes ses composantes sont distinctes, c'est-à-dire si

$$\lambda_1 > \dots > \lambda_n.$$

Dans ce cas, $U(\underline{\lambda})$ est simplement le groupe formé des matrices diagonales unitaires, c'est-à-dire les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux appartiennent à $U(1)$. Ce groupe est diffeomorphe au tore $\mathbb{T}^n = U(1)^n$ de dimension n . L'orbite $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ est alors de dimension maximale $n^2 - n = n(n-1)$. On dira par extension que c'est une *orbite générique*.

3.1.2. Le système de Gelfand–Cetlin

Fixons un spectre (ordonné) $\underline{\lambda}$. Pour toute matrice $A \in \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ et pour tout entier $1 \leq k \leq n$, notons A_k la sous-matrice supérieure gauche de A de taille $k \times k$. Comme A_k est encore une matrice hermitienne, elle admet k valeurs propres réelles (comptées avec leurs multiplicités), qu'on notera

$$\gamma_{1,k}(A) \geq \dots \geq \gamma_{k,k}(A).$$

On définit ainsi pour tout $1 \leq i \leq j \leq n$ une fonction $\gamma_{i,j} : \mathcal{O}(\underline{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}$ (constante à λ_i lorsque $j = n$).

Proposition 3.1.2 [GS83a, proposition 5.3]. *Pour tout $1 \leq i < j \leq n$, on a les inégalités*

$$\gamma_{i,j+1} \geq \gamma_{i,j} \geq \gamma_{i+1,j+1}. \quad (3.1.3)$$

De plus, les fonctions $\gamma_{i,j}$, $1 \leq i \leq j < n$ sont lisses et fonctionnellement indépendantes sur le sous-ensemble de $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ où les inégalités (3.1.3) sont strictes.

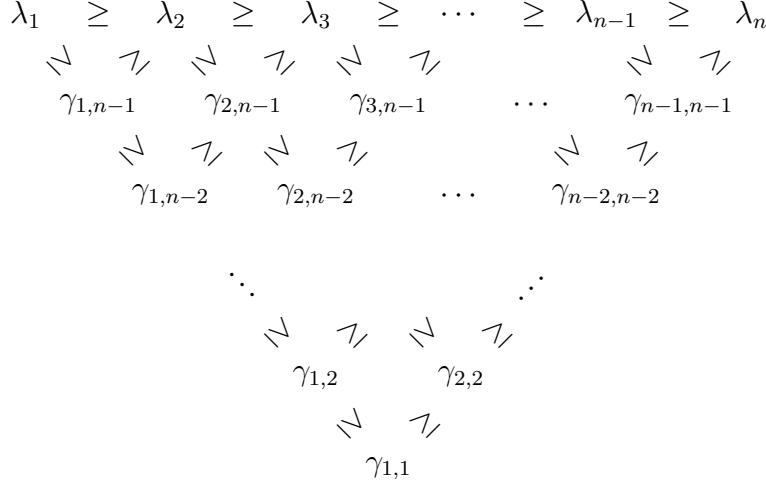


FIGURE 3.1. : Le diagramme de Gelfand–Cetlin résumant les inégalités satisfaites par les fonctions valeur propre $\gamma_{i,j}$.

L'ensemble des inégalités (3.1.3) peut être représenté sur le *diagramme de Gelfand–Cetlin* en figure 3.1. On peut de plus montrer que les fonctions $\gamma_{i,j}$ commutent deux à deux pour le crochet de Poisson défini par la structure symplectique sur $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, comme fonctions collectives définies à partir de la méthode de Thimm [GS83b, Thi81]. Lorsque $\underline{\lambda}$ est générique, l'ensemble U des points où les fonctions $\gamma_{i,j}$, $1 \leq i \leq j < n$, sont fonctionnellement indépendantes est un ouvert de dense de $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$. En revanche, si on a

$$\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+\ell},$$

alors les inégalités de Gelfand–Cetlin impliquent que la fonction $\gamma_{i,j}$ est constante à λ_k pour tout (i, j) dans l'ensemble

$$I = \{(i, j) \mid n - \ell \leq j \leq n, \ k \leq i \leq k + \ell - (n - j)\}.$$

Cet ensemble contient $\ell(\ell + 1)/2 = 1 + 2 + \cdots + (\ell + 1)$ éléments, correspondant aux $\ell + 1$ valeurs propres $\lambda_k, \dots, \lambda_{k+\ell}$ et à $\ell(\ell - 1)/2$ fonctions dans la famille $\{\gamma_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j < n}$. Ainsi, si n_1, \dots, n_p sont les multiplicités des valeurs de λ comme définies dans la proposition 3.1.1, alors la famille

$$\mathcal{F} = \{\gamma_{i,j} \mid 1 \leq i \leq j < n\}$$

contient $n_1(n_1 - 1)/2 + \cdots + n_p(n_p - 1)/2$ fonctions constantes. Si on les retire de

\mathcal{F} , on obtient une famille \mathcal{F}_{red} de cardinal

$$\text{card } \mathcal{F}_{\text{red}} = \frac{n(n-1)}{2} - \sum_{i=1}^p \frac{n_i(n_i-1)}{2}.$$

En développant et en utilisant que $n_1 + \dots + n_p = n$, on trouve

$$\text{card } \mathcal{F}_{\text{red}} = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^p n_i^2) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}(\underline{\lambda}).$$

De plus, les fonctions de la famille \mathcal{F}_{red} sont lisses et fonctionnellement indépendantes sur l'ouvert U où les inégalités (3.1.3) sont strictes pour tout indice (i, j) correspondant à une fonction dans \mathcal{F}_{red} . Cet ouvert U est dense dans $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, et finalement on obtient la proposition suivante :

Proposition 3.1.4 [GS83b]. *Sur toute orbite coadjointe $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, la famille de fonctions*

$$\{\gamma_{i,j} : \mathcal{O}(\underline{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R} \mid 1 \leq i \leq j < n\}$$

définit un système hamiltonien intégrable sur $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, quitte à éliminer quelques fonctions redondantes lorsque $\underline{\lambda}$ n'est pas générique.

Les points singuliers de ce systèmes sont les matrices $A \in \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ pour lesquelles les valeurs $\{\gamma_{i,j}(A)\}_{1 \leq i \leq j < n}$ vérifient au moins un cas d'égalité dans le diagramme de Gelfand–Cetlin (figure 3.1), autre que les égalités nécessairement induites par la première ligne.

Posons $N = n(n-1)/2$. Par abus, l'application $F_{\underline{\lambda}} : \mathcal{O}(\underline{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}^N$ dont les composantes sont les fonctions $\{\gamma_{i,j}\}_{1 \leq i \leq j < n}$ sera appelée *application moment* du système de Gelfand–Cetlin même dans le cas où $\underline{\lambda}$ n'est pas générique. En effet, les fibres de cette application $F_{\underline{\lambda}}$ étant exactement les fibres de la véritable application moment du système de Gelfand–Cetlin, on ne perd rien en généralité en faisant ce choix.

Remarque 3.1.5. On utilise donc dans ce chapitre une définition un peu plus générale de système hamiltonien intégrable, où on ne demande plus que les fonctions définissant le système soient lisses sur toute la variété, mais simplement continues sur toute la variété et lisses sur un ouvert dense de celle-ci.

Les fonctions $\ell_i = \sqrt{2f_i}$ introduites dans le système de pliage de polygones (chapitre 2) ont un comportement similaire. Elles sont continues sur toute la variété des configurations de polygones de taille fixée, mais lisse seulement sur l'ouvert dense formé des polygones dont aucune diagonale n'est réduite à un point. Toutefois elles définissent un système hamiltonien intégrable dans le sens généralisé ci-dessus, dont la géométrie est totalement équivalente à celle du système hamiltonien intégrable au sens classique défini par les fonctions f_1, \dots, f_{n-3} .

3.2. Interprétation géométrique des fibres

Dans cette section, on fixe $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n)$ un spectre réel. On note $D_{\underline{\lambda}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ la matrice diagonale associée et $p : \text{U}(n) \rightarrow \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ la projection naturelle donnée par $p(C) = CD_{\underline{\lambda}}C^*$. On cherche alors à donner un sens géométrique aux fibres de l'application moment $F_{\underline{\lambda}}$ du système de Gelfand–Cetlin sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$. Cela se fera au moyen des variétés de drapeaux et de la notion d'ellipsoïde complexe dans \mathbb{C}^n .

3.2.1. Variétés de drapeaux partiels et complets

Commençons par quelques rappels sur les variétés de drapeaux.

Définition 3.2.1. On appelle *drapeau* dans \mathbb{C}^n une suite strictement croissante (pour l'inclusion) d'espaces vectoriels

$$V^\bullet : \quad \{0\} = V^0 \subset V^1 \subset \dots \subset V^k = \mathbb{C}^n.$$

La *signature* d'un drapeau V^\bullet est le k -uplet $\underline{d} = (d_0, d_1, \dots, d_k)$ défini par

$$d_i = \dim V^i$$

pour tout $0 \leq i \leq k$. On dit qu'un drapeau est *complet* si sa signature est $(0, 1, 2, \dots, n)$, sinon on dit qu'il est *partiel*.

Fixons une signature $\underline{d} = (d_0, d_1, \dots, d_k)$. Si V^\bullet est un drapeau de signature \underline{d} dans \mathbb{C}^n , alors on peut trouver une base (u_1, \dots, u_n) de \mathbb{C}^n telle que pour tout $1 \leq i \leq k$, le sous-espace V^i est engendré par les d_i premiers vecteurs de cette base. Quitte à appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt, on peut supposer cette base orthonormale pour le produit hermitien canonique de \mathbb{C}^n , et on l'identifie avec la matrice $C \in \text{U}(n)$ dont les colonnes sont les vecteurs u_1, \dots, u_n . Réciproquement, si $C \in \text{U}(n)$ est une matrice unitaire, on peut définir un drapeau V^\bullet de signature \underline{d} en posant pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$V^i = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d_i}).$$

Deux matrices $C_1, C_2 \in \text{U}(n)$ définissent le même drapeau de signature \underline{d} si et seulement si $C_2 = C_1 P$ où $P \in \text{U}(\underline{d}) = \text{U}(n_1) \times \dots \times \text{U}(n_k)$ est une matrice diagonale par bloc telle que le i -ème bloc est de taille $n_i = d_i - d_{i-1}$.

Définition 3.2.2. On appelle *variété des drapeaux de signature \underline{d}* la variété quotient

$$\mathcal{F}_{\underline{d}} = \text{U}(n)/\text{U}(\underline{d})$$

pour l'action (à droite) de $U(\underline{d}) = U(n_1) \times \cdots \times U(n_k)$ sur $U(n)$ par multiplication à droite.

On a une bijection naturelle entre l'ensemble des drapeaux de signature \underline{d} et les points de la variété $\mathcal{F}_{\underline{d}}$. On notera plus simplement \mathcal{F} la variété des drapeaux complets. Notons que $\mathcal{F} = U(n)/\mathbb{T}^n$, où $\mathbb{T}^n = U(1) \times \cdots \times U(1)$ est le tore maximal de $U(n)$ formé des matrices unitaires diagonales.

Remarque 3.2.3. En particulier, d'après la proposition 3.1.1, les orbites coadjointes de $\mathcal{H}(n)$ sont difféomorphes à des variétés de drapeaux dans \mathbb{C}^n dont la signature est déterminée par la multiplicité des valeurs de $\underline{\lambda}$. Notamment les orbites génériques sont difféomorphe à la variété des drapeaux complets de \mathbb{C}^n .

3.2.2. Ellipsoïdes complexes

Soit V un espace hermitien, c'est-à-dire un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ¹. Rappelons ici quelques définitions.

Définition 3.2.4. Si V_1, V_2 sont deux espaces hermitiens et $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire, alors

- on appelle *adjoint* de α l'unique application linéaire $\alpha^* : V_2 \rightarrow V_1$ vérifiant

$$\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2, \quad \langle \alpha(v_1) | v_2 \rangle_{V_2} = \langle v_1 | \alpha^*(v_2) \rangle_{V_1},$$

- on dit que α est *unitaire* si elle préserve les produit hermitiens :

$$\forall v_1, v'_1 \in V_1, \quad \langle \alpha(v_1) | \alpha(v'_1) \rangle_{V_2} = \langle v_1 | v'_1 \rangle_{V_1},$$

ou de manière équivalente, si $\alpha^* \circ \alpha = \text{id}_{V_1}$.

- lorsque $V_1 = V_2 = V$, on dit que l'endomorphisme α est *hermitien* (ou *auto-adjoint*) si

$$\forall v, v' \in V, \quad \langle \alpha(v) | v' \rangle = \langle v | \alpha(v') \rangle,$$

c'est-à-dire si $\alpha^* = \alpha$.

Ellipsoïde complexe

Un opérateur $\alpha : V \rightarrow V$ hermitien est toujours diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe une base orthonormée (u_1, \dots, u_k) de V telle que pour

¹On prend ici la convention qu'un produit hermitien est linéaire en la première variable et conjugue la seconde variable, c'est-à-dire que pour tous $v_1, v_2 \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda v_1 | \mu v_2 \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle v_1 | v_2 \rangle$.

tout $1 \leq i \leq k$, $\alpha(u_i) = \gamma_i u_i$. De plus, ses valeurs propres $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ sont réelles. Ainsi, pour tout $v = x_1 v_1 + \dots + x_k v_k$, on a

$$\langle \alpha(v) | v \rangle = 1 \iff \gamma_1 |x_1|^2 + \dots + \gamma_k |x_k|^2 = 1.$$

Par analogie avec le cas euclidien (réel), on pose la définition suivante.

Définition 3.2.5. On appelle *ellipsoïde complexe* (de dimension $k-1$) dans V un sous-ensemble de la forme

$$E_\alpha = \{v \in V \mid \langle \alpha(v) | v \rangle = 1\}$$

avec $\alpha : V \rightarrow V$ un opérateur hermitien *défini positif* (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont strictement positives, ou de manière équivalente, tel que $\langle \alpha(v) | v \rangle > 0$ pour tout $v \in V \setminus \{0\}$).

Si (v_1, \dots, v_k) est une base de vecteurs propres de α et $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ les valeurs propres associées, on dira que les droites vectorielles $\mathbb{C}v_1, \dots, \mathbb{C}v_k$ sont des *axes* de l'ellipsoïde E_α , et les valeurs $1/\sqrt{\gamma_1}, \dots, 1/\sqrt{\gamma_k}$ ses *rayons*.

Lorsque $V = \mathbb{C}^k$ et $A \in \mathcal{H}(k)$ est une matrice hermitienne définie positive, on notera

$$E_A = \{x \in \mathbb{C}^k \mid \langle Ax | x \rangle = 1\}$$

l'ellipsoïde complexe associé à l'opérateur hermitien dont la matrice dans la base canonique est A .

Donnons quelques propriétés élémentaires des ellipsoïdes complexes.

Proposition 3.2.6. Soient α, β deux opérateurs hermitiens définis positifs sur V , et $\phi : V \rightarrow W$ un opérateur unitaire. Alors :

- (3.2.6.a) pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, il existe $t > 0$ tel que $tv \in E_\alpha$,
- (3.2.6.b) $E_\alpha = E_\beta$ si et seulement si $\alpha = \beta$,
- (3.2.6.c) $\phi(E_\alpha) = E_{\phi \circ \alpha \circ \phi^*}$,
- (3.2.6.d) lorsque $V = W$, ϕ préserve E_α si et seulement si ϕ commute avec α .

Démonstration. Soit $v \in V \setminus \{0\}$. Comme α est défini positif, $t = 1/\sqrt{\langle \alpha(v) | v \rangle}$ est bien défini et on a

$$\langle \alpha(tv) | tv \rangle = t^2 \langle \alpha(v) | v \rangle = 1,$$

d'où la propriété (3.2.6.a). Si de plus $E_\alpha = E_\beta$, alors tv satisfait aussi $\langle \beta(tv) | tv \rangle = 1$, d'où

$$\langle \beta(v) | v \rangle = 1/t^2 = \langle \alpha(v) | v \rangle.$$

Ainsi $\langle (\beta - \alpha)(v) \mid v \rangle = 0$ pour tout $v \in V$. Or $\beta - \alpha$ est encore hermitien, donc diagonalisable, mais la condition précédente implique que toutes ses valeurs propres sont nulles. On trouve donc $\beta - \alpha = 0$, d'où la propriété (3.2.6.b). La propriété (3.2.6.c) découle de la relation

$$\langle \phi \circ \alpha \circ \phi^*(\phi(v)) \mid \phi(v) \rangle = \langle \phi(\alpha(v)) \mid \phi(v) \rangle = \langle \alpha(v) \mid v \rangle$$

satisfaite pour tout $v \in V$, utilisant que ϕ est unitaire. La propriété (3.2.6.d) est une conséquence de (3.2.6.b) et (3.2.6.c). \square

Intéressons-nous maintenant à l'intersection d'un ellipsoïde complexe de V et un sous-espace vectoriel de V .

Proposition 3.2.7. *Soient E_α un ellipsoïde complexe dans V , et W_1, W_2 deux sous-espaces vectoriels de V . Alors :*

(3.2.7.a) *$E_\alpha \cap W_1$ est un ellipsoïde complexe dans W_1 : il existe un opérateur hermitien $\beta : W_1 \rightarrow W_1$ défini positif tel que*

$$E_\alpha \cap W_1 = E_\beta,$$

(3.2.7.b) *en particulier, si $V = \mathbb{C}^n$, $W_1 = \mathbb{C}^k \cap \{0\}^{n-k}$ et $A \in \mathcal{H}(n)$ est définie positive, alors*

$$E_A \cap W_1 = E_{A_k}$$

où A_k est la sous-matrice supérieure gauche de taille k de A ,

(3.2.7.c) *$E_\alpha \cap W_1 = E_\alpha \cap W_2$ si et seulement si $W_1 = W_2$.*

Démonstration. Commençons par démontrer (3.2.7.b). Pour cela, il suffit de remarquer qu'en notant $i : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'inclusion canonique, d'image $\mathbb{C}^k \times \{0\}^{n-k}$, on a pour tout $x \in \mathbb{C}^k$,

$$\langle Ai(x) \mid i(x) \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle A_k x \mid x \rangle_{\mathbb{C}^k}.$$

Ensuite, pour démontrer (3.2.7.a) on se ramène au cas précédent en choisissant une application unitaire $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow V$ telle que $\phi(\mathbb{C}^k \times \{0\}^{n-k}) = W$. Soit $A \in \mathcal{H}(n)$ la matrice de $\phi^* \circ \alpha \circ \phi$ dans la base canonique. D'après la propriété (3.2.6.c), $E_\alpha = \phi(E_A)$. De même si on pose $\beta : W \rightarrow W$ par $\beta(x) = \phi(A_k \phi(x))$, on a $E_\beta = \phi(E_{A_k})$. Ainsi,

$$E_\alpha \cap W = \phi(E_A \cap (\mathbb{C}^k \times \{0\}^{n-k})) = \phi(E_{A_k}) = E_\beta.$$

Reste à montrer (3.2.7.c). Soit $w \in W_1$. D'après (3.2.6.a), il existe $t > 0$ tel que $tw \in E_\alpha$. Si $E_\alpha \cap W_1 = E_\alpha \cap W_2$, alors tw , et donc w , appartiennent aussi à W_2 . Ainsi $W_1 \subset W_2$, et par argument de symétrie, $W_1 = W_2$. \square

Drapeau d'ellipsoïdes

Les propriétés que l'on vient d'énoncer motivent les définitions suivantes.

Définition 3.2.8. On appelle *drapeau d'ellipsoïdes* dans \mathbb{C}^n un triplet $(E^\bullet, V^\bullet, A)$ où :

- $V^\bullet : V^1 \subset \dots \subset V^k$ est un drapeau (d'espaces vectoriels) dans \mathbb{C}^n ,
- $A \in \mathcal{H}(n)$ est une matrice hermitienne définie positive de taille n ,
- $E^\bullet : E^1 \subset \dots \subset E^k$ est la suite strictement croissante d'ellipsoïdes complexes définie par $E^i = E_A \cap V^i$ pour tout $1 \leq i \leq k$.

On appelle *signature* de $(E^\bullet, V^\bullet, A)$ la signature du drapeau V^\bullet , et on dit que $(E^\bullet, V^\bullet, A)$ est *complet* lorsque V^\bullet est complet.

Par la suite, on notera $E^\bullet = E_A \cap V^\bullet$, ou même parfois plus simplement E^\bullet , au lieu de $(E^\bullet, V^\bullet, A)$.

Définition 3.2.9. Soit $(E^\bullet, V^\bullet, A)$ un drapeau d'ellipsoïdes complet dans \mathbb{C}^n .

D'après la propriété (3.2.7.a), pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $E^k = E_{\alpha_k}$ où $\alpha_k : V^k \rightarrow V^k$ est un opérateur hermitien défini positif. On dira que le drapeau d'ellipsoïdes E^\bullet est défini par la famille $\alpha_\bullet = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On appelle *valeurs propres* de $(E^\bullet, V^\bullet, \alpha)$ la famille (ordonnée)

$$\Gamma(E^\bullet) = \{\Gamma_{i,j}(E^\bullet) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

où pour tout $1 \leq j \leq n$, $\Gamma_{1,j}(E^\bullet) \geq \dots \geq \Gamma_{j,j}(E^\bullet)$ sont les valeurs propres de $\alpha_j : V^j \rightarrow V^j$.

Lien avec les fibres du système de Gelfand–Cetlin

En particulier, soit V_{std}^\bullet le *drapeau complet standard* dans \mathbb{C}^n , défini par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad V_{\text{std}}^k = \mathbb{C}^k \times \{0\}^{n-k}.$$

Soit $A \in \mathcal{H}(n)$ définie positive, et λ son spectre. Considérons le drapeau d'ellipsoïdes $E_A^\bullet = E_A \cap V_{\text{std}}^\bullet$. D'après (3.2.7.b), pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $E_A^k = E_{A_k}$ où A_k est la sous-matrice supérieure gauche de A de taille $k \times k$. Ainsi,

$$\Gamma(E_A^\bullet) = \Gamma(E_A \cap V_{\text{std}}^\bullet) = \{\gamma_{i,j}(A) \mid 1 \leq i \leq j \leq n\} = F_\lambda(A)$$

où $\gamma_{i,j}$ sont les fonctions valeurs propres définies précédemment. On en déduit que les fibres du système de Gelfand–Cetlin $F_\lambda : \mathcal{O}(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^N$ peuvent s'écrire

$$F_\lambda^{-1}(c) = \{B \in \mathcal{O}(\lambda) \mid \Gamma(E_B \cap V_{\text{std}}^\bullet) = c\}.$$

Fixons maintenant $C \in U(n)$ telle que $A = p(C) = CD_\lambda C^*$. Soit $\varphi_C : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ l'application unitaire définie par $\varphi_C(x) = C^*x$. D'après (3.2.6.c), φ_C envoie l'ellipsoïde E_A sur l'ellipsoïde E_{D_λ} . Plus précisément, φ_C envoie le drapeau d'ellipsoïdes E_A^\bullet sur le drapeau d'ellipsoïdes $\hat{E}_C^\bullet = E_{D_\lambda} \cap V_C^\bullet$, où V_C^\bullet est le drapeau (d'espaces vectoriels) défini par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad V_C^k = \varphi_C(V_{\text{std}}^k).$$

On vérifie aisément que V_C^\bullet peut être défini par la base orthonormale formée des colonnes de C^* . Autrement dit, si on note $q : U(n) \rightarrow \mathcal{F} = U(n)/\mathbb{T}^n$ la projection naturelle, on a $V_C^\bullet = q(C^*)$. De plus, les drapeaux d'ellipsoïdes E_A^\bullet et $\hat{E}_C^\bullet = \varphi_C(E_A^\bullet)$ ont évidemment mêmes valeurs propres. Ainsi, si on définit l'application

$$\Gamma_\lambda : \begin{cases} \mathcal{F} & \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ V^\bullet & \longmapsto \Gamma(E_{D_\lambda} \cap V^\bullet) \end{cases}$$

alors on a $\Gamma_\lambda(V_C^\bullet) = \Gamma(\hat{E}_C^\bullet) = \Gamma(E_A^\bullet) = F_\lambda(A)$. On est alors tenté d'identifier la fibre $F_\lambda^{-1}(c)$ avec la fibre

$$\Gamma_\lambda^{-1}(c) = \{V^\bullet \in \mathcal{F} \mid \Gamma(E_{D_\lambda} \cap V^\bullet) = c\},$$

via une identification plus générale entre $\mathcal{H}(n)$ et \mathcal{F} induite par le procédé précédent : à une matrice $A \in \mathcal{H}(n)$ on associe le drapeau $\varphi_C(V_{\text{std}}^\bullet) = q(C^*)$, où C est une matrice unitaire telle que $A = CD_\lambda C^*$. Toutefois, cette dernière correspondance n'est pas bien définie, comme illustré sur la figure 3.2 :

1. d'une part, si $C_1, C_2 \in U(n)$ sont deux diagonalisations d'une même matrice A , c'est-à-dire si $A = C_1 D_\lambda C_1^* = C_2 D_\lambda C_2^*$, alors les drapeaux $q(C_1^*)$ et $q(C_2^*)$ ne sont pas nécessairement égaux,
2. d'autre part, deux matrices diagonalisées $A = C_1 D_\lambda C_1^*$ et $A' = C_3 D_\lambda C_3^*$ différentes peuvent donner un même drapeau $V^\bullet = q(C_1^*) = q(C_3^*)$.

Plus précisément, cette obstruction peut être lue sur le diagramme donné en figure 3.3. Bien que ce diagramme soit commutatif, l'involution $t : U(n) \rightarrow U(n)$ définie par $t(C) = C^*$ ne préserve pas les fibres des fibrés principaux $p : U(n) \rightarrow \mathcal{O}(\lambda)$ et $q : U(n) \rightarrow \mathcal{F}$, et ne peut donc pas induire une application bien définie $\bar{t} : \mathcal{O}(\lambda) \rightarrow \mathcal{F}$.

Toutefois, l'involution t préserve les fibres des applications $F_\lambda \circ p$ et $\Gamma_\lambda \circ q$, et on aura l'identification

$$F_\lambda^{-1}(c) = p\left(t\left((\Gamma_\lambda \circ q)^{-1}(c)\right)\right)$$

(voir corollaire 3.3.21). Une première étape est donc de déterminer $(\Gamma_\lambda \circ q)^{-1}(c)$ pour toute valeur $c \in \mathbb{R}^N$ vérifiant les inégalités du diagramme de Gelfand–Cetlin,

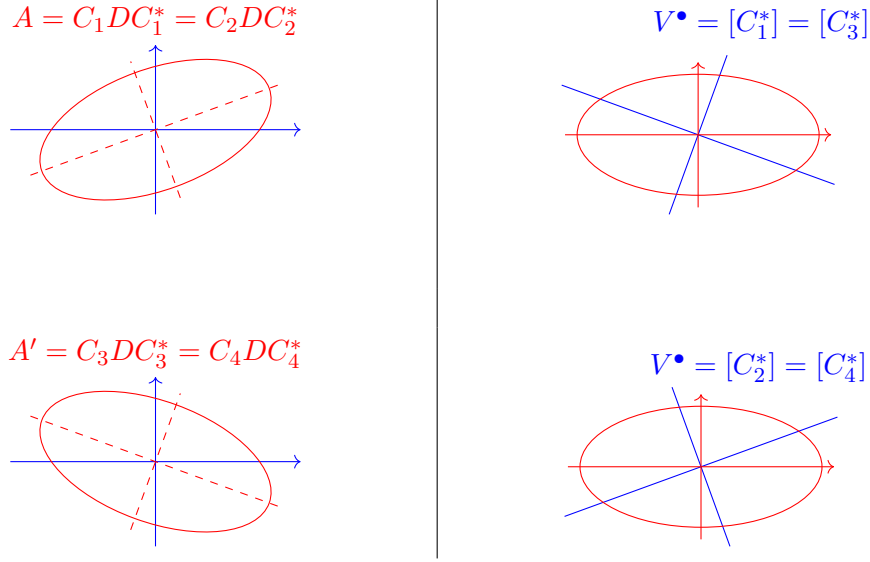


FIGURE 3.2. : Obstruction à une correspondance naturelle entre les fibres $F_\lambda^{-1}(c) \subset \mathcal{H}(n)$ et $\Gamma_\lambda^{-1}(c) \subset \mathcal{F}$.

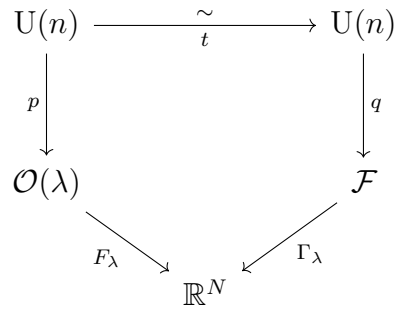


FIGURE 3.3. : Lien entre le système de Gelfand–Cetlin F_λ et l’application Γ_λ

c'est l'objectif de la prochaine section.

3.3. Géométrie des drapeaux d'ellipsoïdes de valeurs propres fixées

Dans toute cette section, on fixe $\underline{\lambda} = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0)$ un spectre réel positif, non-nécessairement générique. On note $D = D_{\underline{\lambda}}$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et E_D l'ellipsoïde complexe associé.

3.3.1. Groupe de symétrie d'un drapeau d'ellipsoïde

Soit V^\bullet un drapeau complet dans \mathbb{C}^n , et $E^\bullet = E_D \cap V^\bullet$ le drapeau d'ellipsoïdes obtenu en prenant l'intersection du drapeau V^\bullet avec l'ellipsoïde « standard » associé à $\underline{\lambda}$. On note $\alpha_\bullet = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la famille d'opérateurs hermitiens définis positifs qui définit le drapeau d'ellipsoïdes E^\bullet , c'est-à-dire telle que pour tout $1 \leq k \leq n$, $E^k = E_{\alpha_k}$ est l'ellipsoïde complexe dans V^k défini par l'opérateur $\alpha_k : V^k \rightarrow V^k$, et $c = \Gamma(E^\bullet)$ les valeurs propres de E^\bullet , c'est-à-dire les valeurs propres des opérateurs de la famille α_\bullet .

Commençons par étudier séparément, pour tout $1 \leq k \leq n$, le groupe de symétrie $G_k \subset U(V^k)$ des transformations unitaires préservant l'ellipsoïde E^k . On utilisera le résultat suivant :

Lemme 3.3.1. *Soit V un espace hermitien, $\alpha : V \rightarrow V$ un opérateur hermitien sur V , et*

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$$

la décomposition de V en les sous-espaces propres de α .

Alors le sous-groupe de $U(V)$ formé des opérateurs unitaires qui commutent avec α est exactement

$$G = U(W_1) \oplus \dots \oplus U(W_r).$$

Remarque 3.3.2. Dans l'expression ci-dessus, on utilise la décomposition induite

$$\text{End}(V) = \bigoplus_{1 \leq i, j \leq r} \text{End}(W_i, W_j).$$

En particulier, par

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_r \in U(W_1) \oplus \dots \oplus U(W_r)$$

on désignera l'unique opérateur unitaire $\varphi : V \rightarrow V$ tel que

$$\varphi(v) = \varphi_1(v_1) \oplus \dots \oplus \varphi_r(v_r)$$

pour tout $v = v_1 \oplus \cdots \oplus v_r \in V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{U}(V)$. Supposons que φ commute avec α . Alors pour tout vecteur propre $v_i \in W_i$ associé à la valeur propre λ_i de α , on a

$$\alpha(\varphi(v_i)) = \varphi(\alpha(v_i)) = \lambda_i \varphi(v_i),$$

donc $\varphi(v_i)$ appartient à W_i . Ainsi, φ se décompose en

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_r$$

avec pour tout $1 \leq i \leq r$, $\varphi_i \in \mathrm{End}(W_i)$. De plus, φ étant unitaire, pour tous $v_i, v'_i \in W_i$, on a

$$\langle \varphi_i(v_i) \mid \varphi_i(v'_i) \rangle = \langle \varphi(v_i) \mid \varphi(v'_i) \rangle = \langle v_i \mid v'_i \rangle,$$

donc φ_i est elle-même unitaire. □

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.3.3. *Le sous-groupe des transformations unitaires de V^k qui préservent l'ellipsoïde E^k est*

$$G_k = \mathrm{U}(W_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{U}(W_r)$$

où W_1, \dots, W_r sont les sous-espaces propres de α_k . On peut supposer ces espaces indexés de sorte que les valeurs propres correspondantes soient dans l'ordre décroissant. Dans ce cas, chaque W_i a dimension n_i , déterminée par

$$\underbrace{c_{1,k} = \cdots = c_{d_1,k}}_{n_1} > \underbrace{c_{d_1+1,k} = \cdots = c_{d_2,k}}_{n_2} > \cdots > \underbrace{c_{d_{r-1}+1,k} = \cdots = c_{d_r,k}}_{n_r}$$

(égalités « horizontales » dans le diagramme de Gelfand–Cetlin).

Démonstration. D'après la propriété (3.2.6.d), un opérateur $\varphi \in \mathrm{U}(V^k)$ préserve l'ellipsoïde $E^k = E_{\alpha_k}$ si et seulement s'il commute avec α_k . Il suffit alors d'appliquer le lemme 3.3.1 pour obtenir l'expression de G_k . Les nombres

$$c_{1,k} \geq \cdots \geq c_{k,k}$$

étant par définition les valeurs propres de α_k comptées avec leur multiplicité, et la dimension d'un sous-espace propre étant égale à la multiplicité de la racine correspondante (puisque α_k est diagonalisable), on a bien

$$\dim W_i = \mathrm{card}\{1 \leq j \leq r \mid c_{j,k} \text{ est la valeur propre associée à } W_i\},$$

soit le nombre n_i défini dans la proposition. \square

On va maintenant s'intéresser au sous-groupe H_{k+1} de G_{k+1} formé des opérateurs unitaires de V^{k+1} préservant à la fois E^{k+1} et E^k (ou de manière équivalente, préservant à la fois E^{k+1} et V^k), et à son sous-groupe H'_{k+1} formé de ces derniers opérateurs qui sont de plus l'identité sur le supplémentaire orthogonal de V^k dans V^{k+1} .

Lemme 3.3.4. *Soit L_k le supplémentaire orthogonal de V^k dans V^{k+1} . Fixons $\ell_k \in L_k$ un générateur unitaire de L_k et posons*

$$\alpha_{k+1}(\ell_k) = w \oplus a\ell_k$$

avec $w \in V^k$ et $a \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $v \in V^k$, on a

$$\alpha_{k+1}(v) = \alpha_k(v) \oplus \langle v | w \rangle \ell_k.$$

Démonstration. En utilisant la décomposition $V^{k+1} = V^k \oplus L_k$, posons pour tout $v \in V^k$,

$$\alpha_{k+1}(v) = \beta(v) \oplus \lambda(v)\ell_k$$

avec $\beta : V^k \rightarrow V^k$ et $\lambda : V^k \rightarrow \mathbb{C}$ linéaires. Comme V^k et L_k sont orthogonaux et α_{k+1} est auto-adjoint, on a pour tout $v \in V^k$,

$$\lambda(v) = \langle \alpha_{k+1}(v) | \ell_k \rangle = \langle v | \alpha_{k+1}(\ell_k) \rangle = \langle v | w \rangle.$$

De plus, pour tout $v \in V^k$ on a

$$\langle \alpha_{k+1}(v) | v \rangle = \langle \beta(v) | v \rangle$$

d'où $E_{\alpha_{k+1}} \cap V^k = E_\beta$. Or par définition du drapeau E^\bullet et de la famille α_\bullet , on a aussi $E_{\alpha_{k+1}} \cap V^k = E_{\alpha_k}$, ainsi d'après la propriété (3.2.6.b), $\beta = \alpha_k$. \square

Proposition 3.3.5. *Soit $V^k = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ la décomposition de V^k en les sous-espaces propres de α_k , et*

$$V^{k+1} = W_1 \oplus \dots \oplus W_r \oplus L_k$$

la décomposition induite sur V^{k+1} , où L_k désigne le supplémentaire orthogonal de V^k dans V^{k+1} . Pour tout $1 \leq i \leq r$, notons $\text{proj}_{W_i} : V^{k+1} \rightarrow W_i$ la projection orthogonale sur le facteur W_i . Alors :

- le sous-groupe H_{k+1} des opérateurs unitaires sur V^{k+1} qui préservent à la fois E^{k+1} et E^k est l'ensemble des éléments

$$\varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_r \oplus \xi \cdot \text{id}_{L_k} \in \text{U}(W_1) \oplus \dots \oplus \text{U}(W_r) \oplus \text{U}(L_k) \quad (3.3.6)$$

vérifiant pour tout $1 \leq i \leq r$,

$$\forall w_i \in \text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k)), \quad \varphi_i(w_i) = \xi w_i. \quad (3.3.7)$$

- le sous-groupe H'_{k+1} des opérateurs unitaires sur V^{k+1} qui préservent à la fois E^{k+1} et E^k , et dont la restriction à L_k est l'identité, est l'ensemble des éléments de H_{k+1} tels que $\xi = 1$ dans l'expression (3.3.6).

Démonstration. Fixons ℓ_k un générateur unitaire de L_k et posons

$$\alpha_{k+1}(\ell_k) = w_1 \oplus \cdots \oplus w_r \oplus a\ell_k \in V^{k+1} = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r \oplus L_k.$$

D'après le lemme 3.3.4, pour tout $v_i \in W_i$ on a

$$\alpha_{k+1}(v_i) = \alpha_k(v_i) \oplus \langle v_i \mid w_1 \oplus \cdots \oplus w_r \rangle \ell_k = \mu_{i,k} v_i \oplus \langle v_i \mid w_i \rangle \ell_k$$

où $\mu_{i,k}$ est la valeur propre de α_k associée au sous-espace propre W_i . Remarquons que, si w_i dépend du choix de $\ell_k \in L_k$, en revanche le sous-espace $\mathbb{C}w_i$ peut être défini intrinsèquement comme l'espace $\text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k))$.

Soit $\phi \in \text{U}(V^{k+1})$. Supposons que ϕ préserve $E^k \subset V^k$. Alors d'après la proposition 3.3.3, ϕ est de la forme

$$\phi = \phi_1 \oplus \cdots \oplus \phi_r \oplus \xi \cdot \text{id}_{L_k}$$

avec $\phi_i \in \text{U}(W_i)$ pour tout $1 \leq i \leq r$ et $\xi \in \text{U}(1)$. De plus, d'après la propriété (3.2.6.d), ϕ préserve E^{k+1} si et seulement s'il commute avec α_{k+1} .

Pour tout $v_i \in W_i$ on a

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}(\phi(v_i)) = \mu_{i,k} \phi(v_i) \oplus \langle \phi(v_i) \mid w_i \rangle \ell_k = \mu_{i,k} \phi(v_i) \oplus \langle v_i \mid \phi_i^*(w_i) \rangle \ell_k, \\ \phi(\alpha_{k+1}(v_i)) = \mu_{i,k} \phi(v_i) \oplus \langle v_i \mid w_i \rangle \xi \ell_k = \mu_{i,k} \phi(v_i) \oplus \langle v_i \mid \bar{\xi} w_i \rangle \ell_k. \end{cases}$$

De plus,

$$\begin{cases} \alpha_{k+1}(\phi(\ell_k)) = \alpha_{k+1}(\xi \ell_k) = \xi w_1 \oplus \cdots \oplus \xi w_r \oplus \xi a\ell_k, \\ \phi(\alpha_{k+1}(\ell_k)) = \phi(w_1 \oplus \cdots \oplus w_r \oplus a\ell_k) = \phi_1(w_1) \oplus \cdots \oplus \phi_r(w_r) \oplus \xi a\ell_k. \end{cases}$$

Ainsi, ϕ préserve E^{k+1} si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq n$, $\phi_i(w_i) = \xi w_i$, d'où la condition (3.3.7).

De plus, il est clair qu'un tel $\phi \in H_{k+1}$ est l'identité sur L_k si et seulement si $\xi = 1$. \square

Remarque 3.3.8. Il peut arriver que $\text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k))$ soit réduit à zéro (c'est-à-dire que W_i soit orthogonal à $\alpha_{k+1}(L_k)$), et donc que la condition (3.3.7) soit

trivialement vérifiée. Dans ce cas, en reprenant la preuve précédente, on vérifie que pour tout $w_i \in W_i$, on a

$$\alpha_{k+1}(w_i) = \alpha_k(w_i) \oplus 0.$$

Ainsi, la valeur propre de α_k associée à l'espace W_i est aussi valeur propre de α_{k+1} , il y a donc une égalité « verticale » dans le diagramme de Gelfand–Cetlin.

Par contraposée, s'il n'y a pas d'égalité verticale au niveau de la valeur propre associée à W_i dans le diagramme de Gelfand–Cetlin, alors $\text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k))$ est de dimension 1.

Toutefois la réciproque est fausse : il peut y avoir égalité verticale dans le diagramme de Gelfand–Cetlin sans que $\text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k)) = \{0\}$ pour le sous-espace propre W_i correspondant (c'est le cas par exemple dans la section 3.4.2).

Remarque 3.3.9. Toujours avec les notations de la proposition 3.3.5, si pour tout $1 \leq i \leq r$ on note W'_i le supplémentaire orthogonal de $W''_i = \text{proj}_{W_i}(\alpha_{k+1}(L_k))$ dans W_i , alors le groupe H_{k+1} est l'ensemble des éléments de la forme

$$\phi = (\phi'_1 \oplus \xi.\text{id}_{W''_1}) \oplus \cdots \oplus (\phi'_r \oplus \xi.\text{id}_{W''_r}) \oplus \xi.\text{id}_{L_k}$$

pour la décomposition

$$U(V^{k+1}) = (U(W'_1) \oplus U(W''_1)) \oplus \cdots \oplus (U(W'_r) \oplus U(W''_r)) \oplus U(L_k).$$

En particulier on a les difféomorphismes

$$H_{k+1} \approx U(W'_1) \times \cdots \times U(W'_r) \times U(1), \quad H'_{k+1} \approx U(W'_1) \times \cdots \times U(W'_r)$$

où chaque W'_i a codimension au plus 1 dans W_i .

Définition 3.3.10. On appelle *groupe de symétrie grossier* du drapeau d'ellipsoïdes E^\bullet le groupe produit

$$G(E^\bullet) = G_1 \times \cdots \times G_n$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$, G_k est le groupe des transformations unitaires de V^k préservant l'ellipsoïde E^k .

Considérons aussi $H'(E^\bullet) < H(E^\bullet) < G(E^\bullet)$ les sous-groupes

$$H'(E^\bullet) = H'_1 \times \cdots \times H'_n \quad \text{et} \quad H(E^\bullet) = H_1 \times \cdots \times H_n$$

où pour tout $1 \leq k \leq n$, H'_k et H_k sont les sous-groupes définis dans la proposition 3.3.5.

On appelle *espace de symétrie réduit* du drapeau d'ellipsoïdes E^\bullet la variété

quotient

$$S(E^\bullet) = G(E^\bullet)/H'(E^\bullet)$$

pour l'action (à droite) propre et libre de $H'(E^\bullet)$ sur $G(E^\bullet)$ définie par

$$\phi \cdot f = \left((f_2^{-1})|_{V_1^{V_1}} \circ \phi_1 \circ f_1, \dots, (f_n^{-1})|_{V_{n-1}^{V_{n-1}}} \circ \phi_{n-1} \circ f_{n-1}, \phi_n \circ f_n \right) \quad (3.3.11)$$

pour tout $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in G(E^\bullet)$ et $f = (f_1, \dots, f_n) \in H'(E^\bullet)$.

3.3.2. Image directe d'un drapeau d'ellipsoïdes

Dans toute cette sous-section, V^\bullet est un drapeau complet dans \mathbb{C}^n , $E^\bullet = E_D \cap V^\bullet$ le drapeau d'ellipsoïde associé. On fixe aussi une matrice $C \in U(n)$ définissant V^\bullet , c'est-à-dire telle que $V^\bullet = q(C)$, et on note u_1, \dots, u_n ses colonnes.

Définition 3.3.12. Soit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in G(E^\bullet)$.

— L'image directe de V^\bullet par ϕ est le drapeau complet

$$\phi_* V^\bullet : \quad V_\phi^0 \subset V_\phi^1 \subset \dots \subset V_\phi^n$$

défini par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad V_\phi^k = \phi_n(\phi_{n-1}(\dots \phi_k(V^k) \dots)).$$

— L'image directe de $C = (u_1, \dots, u_n)$ par ϕ est la matrice

$$\varphi_* C = (u_1^\phi, \dots, u_n^\phi)$$

définie (en colonnes) par

$$\forall 1 \leq k \leq n, \quad u_k^\phi = \phi_n(\phi_{n-1}(\dots \phi_k(u_k) \dots)).$$

Proposition 3.3.13. Pour tout $\phi \in G(E^\bullet)$,

(3.3.13.a) $\phi_* C$ est une matrice unitaire,

(3.3.13.b) $q(\phi_* C) = \phi_* V^\bullet$.

Démonstration. Rappelons que (u_1, \dots, u_n) est une base unitaire. Comme les transformations ϕ_1, \dots, ϕ_n sont toutes unitaires, les vecteurs $u_1^\phi, \dots, u_n^\phi$ sont encore unitaires. Reste à voir qu'ils sont deux à deux orthogonaux. Pour tout $1 \leq i < j \leq n$ on a

$$\begin{aligned} \langle u_i^\phi | u_j^\phi \rangle &= \langle \phi_n(\phi_{n-1}(\dots \phi_{j+1}(\phi_j(\dots \phi_i(u_i) \dots)) \dots)) | \phi_n(\phi_{n-1}(\dots \phi_j(u_j) \dots)) \rangle \\ &= \langle \phi_{j-1}(\dots \phi_i(u_i) \dots) | u_j \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\phi_{j-1}(\cdots \phi_i(u_i) \cdots)$ appartient à $V^{j-1} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{j-1})$. Ainsi $(u_1^\phi, \dots, u_n^\phi)$ est une base unitaire, d'où la propriété (3.3.13.a). De plus, il est clair que chaque u_i^ϕ appartient à V_ϕ^i , ainsi on a bien

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad V_\phi^i = \text{Vect}(u_1^\phi, \dots, u_i^\phi),$$

c'est-à-dire que V_ϕ^\bullet est la projection par q de la matrice $\phi_* C = (u_1^\phi, \dots, u_n^\phi)$. \square

Le lemme suivant permet avant tout une notation plus commode des images directes de drapeaux et de matrices unitaires.

Lemme 3.3.14. *Soit $\phi \in G(E^\bullet)$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, définissons $\bar{\phi}_k : V^k \rightarrow V_\phi^k$ par les relations de récurrence :*

$$\begin{cases} \bar{\phi}_n = \phi_n, \\ \bar{\phi}_k = (\bar{\phi}_{k+1})|_{V_\phi^k} \circ \phi_k \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq n. \end{cases} \quad (3.3.15)$$

Alors pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} (3.3.14.a) \quad & u_k^\phi = \bar{\phi}_k(u_k), \\ (3.3.14.b) \quad & V_\phi^k = \bar{\phi}_k(V^k) = \bar{\phi}_{k+1}(V^k), \\ (3.3.14.c) \quad & E_D \cap V_\phi^k = \bar{\phi}_k(E^k) = \bar{\phi}_{k+1}(E^k), \end{aligned}$$

(où par convention on définit $\bar{\phi}_{n+1}$ comme l'identité sur \mathbb{C}^n).

De plus, pour tous $\psi \in G(E^\bullet)$ et $f \in H(E^\bullet)$, on a

$$(3.3.14.d) \quad \psi = \phi \cdot f \text{ si et seulement si pour tout } 1 \leq k \leq n, \quad \bar{\psi}_k = \bar{\phi}_k \circ f_k,$$

où $\psi = \phi \cdot f$ est défini par la formule 3.3.11.

Démonstration. Par une récurrence immédiate, on montre que pour tout sous-ensemble $S \subset V^k$ on a

$$\bar{\phi}_k(S) = \phi_n(\phi_{n-1}(\cdots \phi_k(S) \cdots)).$$

Pour $S = \{u_k\}$ on retrouve la propriété (3.3.14.a), tandis que pour $S = V^k = \phi_k^{-1}(V_k)$ on retrouve la propriété (3.3.14.b). Rappelons maintenant que, par définition, ϕ_k préserve l'ellipsoïde $E^k = E_D \cap V^k$. Pour tout $\ell \geq k$, en écrivant

$$E^k = E_D \cap V^k = E_D \cap V^\ell \cap V^k$$

on obtient

$$\phi_\ell(E^k) = \phi_\ell(E_D \cap V^\ell) \cap \phi_\ell(V^k) = E_D \cap V^\ell \cap \phi_\ell(V^k) = E_D \cap \phi_\ell(V^k).$$

En itérant le procédé pour ℓ allant de k à n , on obtient finalement $\bar{\phi}_\ell(E^k) = E_D \cap \bar{\phi}_\ell(V^k)$. En prenant $\ell \in \{k, k+1\}$ et en appliquant la propriété (3.3.14.b) précédente, on obtient (3.3.14.c). Enfin, la proposition (3.3.14.d) se montre également par récurrence en appliquant simplement les formules 3.3.11 et 3.3.15. \square

Les opérations d'image directe que l'on a définies ne sont pas injectives. Deux éléments de $G(E^\bullet)$ appliqués à V^\bullet (res. à C) donnent le même drapeau (res. la même matrice unitaire) s'ils sont égaux modulo $H(E^\bullet)$ (res. modulo $H'(E^\bullet)$).

Proposition 3.3.16. *Soient $\phi, \psi \in G(E^\bullet)$. Alors :*

(3.3.16.a) $\phi_* V^\bullet = \psi_* V^\bullet$ si et seulement si $\psi = \phi \cdot f$ avec $f \in H(E^\bullet)$,

(3.3.16.b) $\phi_* C = \psi_* C$ si et seulement si $\psi = \phi \cdot f$ avec $f \in H'(E^\bullet)$.

Démonstration. (3.3.16.a) : On a $V_\phi^n = \mathbb{C}^n = V_\psi^n$.

Supposons que pour tout $1 \leq k \leq n$ on ait $V_\phi^k = V_\psi^k$. Alors l'application

$$f_k = \bar{\phi}_k^{-1} \circ \bar{\psi}_k : V^k \rightarrow V^k$$

est bien définie. De plus, d'après la propriété (3.3.14.b), f_k préserve V^{k-1} , et d'après (3.3.14.c), elle préserve E^k . Ainsi, $f = (f_1, \dots, f_n)$ appartient à $H(E^\bullet)$ et d'après la propriété (3.3.14.d), on a $\psi = \phi \cdot f$.

Réciproquement, si $\psi = \phi \cdot f$ avec $f \in H(E^\bullet)$, alors d'après la propriété (3.3.14.d), pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $\bar{\psi}_k = \bar{\phi}_k \circ f_k$, d'où

$$V_\psi^k = \bar{\psi}_k(V_k) = \bar{\phi}_k \circ f_k(V_k) = \bar{\phi}_k(V_k) = V_\phi^k.$$

(3.3.16.a) : Supposons $\phi_* C = \psi_* C$. D'après (3.3.13.b), on a $\phi_* V^\bullet = \psi_* V^\bullet$, qui d'après la propriété (3.3.16.a) que l'on vient de démontrer est équivalent à $\psi = \phi \cdot f$ avec $f \in H(E^\bullet)$. Soit $1 \leq k \leq n$. La propriété (3.3.14.d) implique

$$u_k^\psi = \bar{\psi}_k(u_k) = \bar{\phi}_k \circ f_k(u_k).$$

Mais par hypothèse, $u_k^\psi = u_k^\phi = \bar{\phi}_k(u_k)$, d'où finalement $f_k(u_k) = u_k$. Ainsi, f_k se restreint à la fonction identité sur $\text{Vect}(u_k)$ qui n'est autre que le supplémentaire orthogonal de $V^{k-1} = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})$ dans $V^k = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k)$. Ainsi, f appartient à $H'(E^\bullet)$.

Réciproquement, si $\psi = \phi \cdot f$ avec $f \in H'(E^\bullet)$, alors pour tout $1 \leq k \leq n$ on a $f(u_k) = u_k$, et donc toujours d'après (3.3.14.d) on a

$$u_k^\psi = \bar{\psi}_k(u_k) = \bar{\phi}_k \circ f_k(u_k) = \bar{\phi}_k(u_k) = u_k^\phi,$$

d'où $\phi_* C = \psi_* C$. \square

On va maintenant montrer que l'opération d'image directe appliquée à V^\bullet permet d'atteindre n'importe quel drapeau dans la fibre de Γ_λ contenant V^\bullet . Autrement dit, si V_1^\bullet est un drapeau complet dont l'intersection avec l'ellipsoïde standard E_D a même valeurs propres que $E^\bullet = E_D \cap V^\bullet$, alors il existe une symétrie $\phi \in G(E^\bullet)$ telle que $V_1^\bullet = \phi_* V^\bullet$. On commence par montrer le résultat plus faible suivant : si l'ellipsoïde complexe E^k contient deux ellipsoïdes E_1^{k-1} et E_2^{k-1} de codimension 1 de mêmes rayons, alors il existe une symétrie $\phi_k \in G_k$ de E^k qui envoie E_1^{k-1} sur E_2^{k-1} .

Lemme 3.3.17. *Soit V un espace hermitien, et V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels de codimension 1 dans V . Soit $\alpha : V \rightarrow V$ une forme hermitienne définie positive et E_α l'ellipsoïde complexe associé dans V . Pour $i = 1, 2$, notons $\beta_i : V_i \rightarrow V_i$ la forme hermitienne définie positive telle que $E_{\beta_i} = E_\alpha \cap V_i$.*

Si β_1 et β_2 ont mêmes valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités), alors il existe une transformation unitaire $\varphi : V \rightarrow V$ telle que

$$\begin{cases} \varphi(E_\alpha) = E_\alpha, \\ \varphi(V_1) = V_2. \end{cases}$$

Démonstration. On note $n = \dim V_1 = \dim V_2$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de β_1 et β_2 . Pour $i = 1, 2$, on note :

- (v_1^i, \dots, v_n^i) une base de vecteurs propres de β_i associée à $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
- L_i le supplémentaire orthogonal de V_i dans V ,
- ℓ_i un générateur unitaire fixé de L_i ,
- $\mathcal{B}_i = (v_1^i, \dots, v_n^i, \ell_i)$ la base unitaire de V correspondante,
- $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n) \in \mathbb{C}^n$ et $a_i \in \mathbb{R}$ tels que la matrice de α dans la base \mathcal{B}_i soit :

$$A_i = \left(\begin{array}{c|c} D & x_i \\ \hline x_i^* & a_i \end{array} \right)$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Calculons le polynôme caractéristique de α . Pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, la matrice diagonale $D - XI_n$ est inversible. Notons

$$y_i = (D - XI_n)^{-1} x_i.$$

On a alors $y_i^* = x_i^* (D - XI_n)^{-1}$ (puisque $(D - XI_n)^{-1}$ est encore diagonale à

coefficients réels). Ainsi :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline y_i^* & (a_i - X) - y_i^* x_i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} D - XI_n & x_i \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = A_i - XI_{n+1}.$$

En notant $P_\lambda(X) = (\lambda_1 - X) \cdots (\lambda_n - X)$, le polynôme caractéristique P_α de α peut alors s'écrire :

$$P_\alpha(X) = ((a_i - X) - y_i^* x_i) P_\lambda(X).$$

Or, la constante

$$a_i = \text{Tr } A_i - \text{Tr } D = \text{Tr } \alpha - \text{Tr } D$$

ne dépend pas de i . On a donc nécessairement $y_1^* x_1 = y_2^* x_2$, c'est-à-dire

$$\sum_{j=1}^n \frac{|x_1^j|^2}{\lambda_j - X} = \sum_{j=1}^n \frac{|x_2^j|^2}{\lambda_j - X}, \quad (3.3.18)$$

cette égalité pouvant être vue comme une égalité entre polynômes de Laurent d'indéterminée X .

Notons maintenant $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ où $\gamma_1 > \dots > \gamma_p$ sont les valeurs propres *distinctes* de β_1 et β_2 , et soit

$$V_i = W_{i,1} \oplus \dots \oplus W_{i,p}$$

la décomposition en sous-espaces propres associée pour chaque β_i . Posons

$$\alpha(\ell_i) = w_{i,1} \oplus \dots \oplus w_{i,p} \oplus a_i \ell_i$$

avec $w_{i,j} \in W_{i,j}$ pour tout $1 \leq j \leq p$. Par définition, le vecteur $x_i \in \mathbb{C}^n$ représente les coordonnées de $w_{i,1} \oplus \dots \oplus w_{i,p}$ dans la base orthonormale (v_1^i, \dots, v_n^i) . Ainsi, pour tout $1 \leq k \leq p$, la norme $\|w_{i,k}\|^2$ est égale à

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \lambda_j = \gamma_k}} |x_i^j|^2.$$

En regroupant les valeurs propres identiques dans chaque membre de l'égalité 3.3.18, on obtient donc

$$\sum_{k=1}^p \frac{\|w_{1,k}\|^2}{\gamma_k - X} = \sum_{k=1}^p \frac{\|w_{2,k}\|^2}{\gamma_k - X}.$$

En identifiant deux à deux les coefficients, on en déduit que pour tout $1 \leq k \leq n$,

les vecteurs $w_{1,k}$ et $w_{2,k}$ ont même norme dans V . Ainsi, il existe une transformation $\psi_k : W_{1,k} \rightarrow W_{2,k}$ telle que $\psi_k(w_{1,k}) = w_{2,k}$.

Posons alors

$$\varphi = \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_p \oplus \xi \in U(V)$$

où $\xi : L_1 \rightarrow L_2$ est l'application unitaire définie par $\xi(\ell_1) = \ell_2$. Autrement dit, φ est définie par

$$\varphi(v_1 \oplus \cdots \oplus v_p \oplus c\ell_1) = \psi_1(v_1) \oplus \cdots \oplus \psi_p(v_p) \oplus c\ell_2$$

pour tous $v_k \in W_{1,k}$ et $c \in \mathbb{C}$. On a immédiatement $\varphi(V_1) = V_2$. Reste à vérifier que φ préserve E_α , ce qui d'après la propriété (3.2.6.d) est équivalent à vérifier que φ commute avec α . On a d'une part

$$\begin{cases} \varphi \circ \alpha(\ell_1) = \varphi(w_{1,1} \oplus \cdots \oplus w_{1,p} \oplus a_1\ell_1) = \psi_1(w_{1,1}) \oplus \cdots \oplus \psi_p(w_{1,p}) \oplus a_1\ell_2, \\ \alpha \circ \varphi(\ell_1) = \alpha(\ell_2) = w_{2,1} \oplus \cdots \oplus w_{2,p} \oplus a_2\ell_2. \end{cases}$$

Ces deux termes sont bien égaux puisqu'on a déjà vu que $a_1 = a_2$, et on a choisi chaque ψ_k de sorte que $\psi_k(w_{1,k}) = w_{2,k}$. D'autre part, pour tout $v_k \in W_{1,k}$, en utilisant la forme des matrices A_1 et A_2 , on trouve

$$\begin{cases} \varphi \circ \alpha(v_k) = \varphi(\gamma_k v_k + c_1\ell_1) = \gamma_k \psi_k(v_k) \oplus c_1\ell_2, \\ \alpha \circ \varphi(v_k) = \alpha(\psi_k(v_k)) = \gamma_k \psi_k(v_k) \oplus c_2\ell_2. \end{cases}$$

Les scalaires c_1 et c_2 peuvent être calculés explicitement en utilisant le fait que α est auto-adjoint :

$$\begin{cases} c_1 = \langle \alpha(v_k) \mid \ell_1 \rangle = \langle v_k \mid \alpha(\ell_1) \rangle = a_1 \langle v_k \mid \ell_1 \rangle, \\ c_2 = \langle \alpha(\psi_k(v_k)) \mid \ell_2 \rangle = \langle \psi_k(v_k) \mid \alpha(\ell_2) \rangle = a_2 \langle \psi_k(v_k) \mid \ell_2 \rangle. \end{cases}$$

Encore une fois, on a $a_1 = a_2$, et comme φ est unitaire on a

$$\langle \psi_k(v_k) \mid \ell_2 \rangle = \langle \varphi(v_k) \mid \varphi(\ell_1) \rangle = \langle v_k \mid \ell_1 \rangle,$$

d'où $\varphi \circ \alpha = \alpha \circ \varphi$. □

Proposition 3.3.19. *Soient V_1^\bullet, V_2^\bullet deux drapeaux complets dans \mathbb{C}^n , et $C_1, C_2 \in U(n)$ des bases pour ces drapeaux (c'est-à-dire que $q(C_i) = V_i^\bullet$ pour $i = 1, 2$). Notons $E_1^\bullet = E_D \cap V_1^\bullet$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\Gamma_\lambda(V_1^\bullet) = \Gamma_\lambda(V_2^\bullet)$,
2. il existe $\phi \in G(E_1^\bullet)$ tel que $V_2^\bullet = \phi_* V_1^\bullet$,

3. il existe $\phi \in G(E_1^\bullet)$ tel que $C_2 = \phi_* C_1$.

Démonstration. Posons $E_i^\bullet = E_D \cap V_i^\bullet$. Rappelons que par définition $\Gamma_\lambda(V_i^\bullet) = \Gamma(E_i^\bullet)$. Notons $\alpha_\bullet = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (res. $\beta_\bullet = (\beta_1, \dots, \beta_n)$) la famille d'opérateurs hermitiens définissant E_1^\bullet (res. définissant E_2^\bullet), c'est-à-dire telle que $E_1^k = E_{\alpha_k}$ (res. $E_2^k = E_{\beta_k}$).

$3 \Rightarrow 2$. C'est la propriété (3.3.13.b) déjà démontrée.

$2 \Rightarrow 1$. Supposons $V_2^\bullet = \phi_* V_1^\bullet$. Alors d'après (3.3.14.c), on a $E_2^k = \bar{\phi}_k(E_1^k)$, c'est-à-dire $E_{\beta_k} = \bar{\phi}_k(E_{\alpha_k})$. D'après (3.2.6.c) et (3.2.6.b), on a alors $\beta_k = \bar{\phi}_k \circ \alpha_k \circ \bar{\phi}_k^{-1}$. Ainsi, α_k et β_k ont mêmes valeurs propres pour tout $1 \leq k \leq n$, autrement dit $\Gamma(E_1^\bullet) = \Gamma(E_2^\bullet)$.

$1 \Rightarrow 2$. Supposons $\Gamma(E_1^\bullet) = \Gamma(E_2^\bullet)$, et construisons $\phi \in G(E^\bullet)$ par récurrence.

En appliquant le lemme 3.3.17 à V_1^{n-1}, V_2^{n-1} dans \mathbb{C}^n , on obtient une application ϕ_n préservant E_1^n et telle que $\phi_n(V_1^{n-1}) = V_2^{n-1}$.

Supposons construits $\phi_n, \phi_{n-1}, \dots, \phi_{k+1}$ tels que pour tout $k < i \leq n$ on ait $\bar{\phi}_i(V_1^{i-1}) = V_2^{i-1}$. Posons

$$W_2^{k-1} = \phi_{k+1}^{-1}(\phi_{k+2}^{-1}(\dots \phi_n^{-1}(V_2^{k-1}) \dots)) = \bar{\phi}_{k+1}^{-1}(V_2^{k-1}) \subset V_1^k,$$

et notons $\hat{E}_2^{k-1} = E_1^k \cap W_2^{k-1}$. En reprenant le lemme 3.3.14, on peut montrer que

$$\bar{\phi}_{k+1}(E_1^k) = E_D \cap \bar{\phi}_{k+1}(V_1^k) = E_D \cap V_2^k = E_2^k.$$

Par suite, $\bar{\phi}_{k+1}(\hat{E}_2^{k-1}) = E_2^{k-1}$, donc \hat{E}_2^{k-1} a mêmes rayons que E_2^{k-1} , et donc par hypothèse mêmes rayons que E_1^{k-1} . En appliquant le lemme 3.3.17 à E_1^{k-1} et \hat{E}_2^{k-1} dans V_1^k , on obtient une application $\phi_k : V_1^k \rightarrow V_1^k$ préservant E_1^k et telle que $\phi_k(V_1^{k-1}) = W_2^{k-1}$, c'est-à-dire

$$\phi_n(\phi_{n-1}(\dots \phi_k(V_1^{k-1}) \dots)) = V_2^{k-1}.$$

Itérant le procédé pour k allant de n à 1, on trouve bien $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n) \in G(E^\bullet)$ tel que $V_2^\bullet = \phi_* V_1^\bullet$.

$1 \Rightarrow 3$. Supposons $\Gamma(E_1^\bullet) = \Gamma(E_2^\bullet)$. On vient de montrer qu'il existe $\phi \in G(E^\bullet)$ tel que $V_2^\bullet = \phi_* V_1^\bullet$. Posons $C'_2 = \phi_* C_1$. D'après (3.3.13.b), on a

$$q(C'_2) = \phi_* q(C_1) = \phi_* V_1^\bullet = V_2^\bullet = q(C_2).$$

Ainsi, il existe $T = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{T}^n$ telle que $C_2 = C'_2 T$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, posons $f_k = \xi_k \cdot \text{id}_{V_1^k}$. On obtient un élément $f = (f_1, \dots, f_n)$ de $H(E^\bullet)$. Posons

$\psi = \phi \cdot f$ (comme défini par la formule (3.3.11)). D’après (3.3.14.d), pour tout $1 \leq k \leq n$, on a $\bar{\psi}_k = \xi_k \bar{\phi}_k$, d’où en appliquant (3.3.14.a),

$$\psi_* C_1 = (\xi_1 u_1^\phi, \dots, \xi_n u_n^\phi) = (\phi_* C_1) T = C'_2 T = C_2. \quad \square$$

On obtient ainsi le théorème principal de cette section :

Théorème 3.3.20. *Notons $c = \Gamma(E^\bullet) \in \mathbb{R}^N$ les valeurs propres de E^\bullet . Alors l’application*

$$\tilde{\Phi}_C : \begin{array}{ccc} G(E^\bullet) & \longrightarrow & U(n) \\ \phi & \longmapsto & \phi_* C \end{array}$$

passse au quotient en un plongement $\Phi_C : S(E^\bullet) \rightarrow U(n)$ d’image $(\Gamma_\lambda \circ q)^{-1}(c)$.

On s’intéresse plus particulièrement au corollaire suivant :

Corollaire 3.3.21. *La fibre $F_\lambda^{-1}(c)$ du système de Gelfand–Cetlin est une sous-variété plongée de $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$, difféomorphe à la variété quotient*

$$S(E^\bullet)/U(\underline{\lambda}),$$

où $U(\underline{\lambda})$ est le groupe des matrices unitaires commutant avec $D_\lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et son action (à droite) sur $S(E^\bullet)$ est définie par

$$\phi \cdot P = \Phi_C^{-1}(P^* \Phi_C(\phi)) \quad (3.3.22)$$

pour tous $P \in U(\underline{\lambda})$ et $\phi \in S(E^\bullet)$.

Démonstration. D’après le théorème 3.3.20, $(\Gamma_\lambda \circ q)^{-1}(c)$ est une sous-variété plongée de $U(n)$, donc son image \tilde{N} par le difféomorphisme $t : U(n) \rightarrow U(n)$, qui à $C \in U(n)$ associe C^* , est encore une sous-variété plongée de $U(n)$. Or, on a la relation

$$\Gamma_\lambda \circ q \circ t = F_\lambda \circ p$$

illustrée sur le diagramme 3.3, donc $\tilde{N} = (F_\lambda \circ p)^{-1}(c)$. Or, la restriction $p : \tilde{N} \rightarrow F_\lambda^{-1}(c)$ est encore un $U(\underline{\lambda})$ -fibré principal, donc sa base $F_\lambda^{-1}(c)$ est difféomorphe à la variété quotient $\tilde{N}/U(\underline{\lambda})$. Quand on transporte l’action de $U(\underline{\lambda})$ sur \tilde{N} en une action sur $S(E^\bullet)$ via le difféomorphisme $\Phi_C^{-1} \circ t : \tilde{N} \rightarrow S(E^\bullet)$, on obtient bien l’action définie par la formule 3.3.22. \square

3.4. Exemples de fibres

Dans cette section, on étudie plus particulièrement quelques fibres de systèmes de Gelfand–Cetlin en utilisant les outils introduits précédemment. Notons

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$$

un spectre strictement positif fixé, $F_\lambda : \mathcal{O}(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^N$ le système de Gelfand–Cetlin associé sur l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\lambda)$ (où $N = n(n-1)/2$). On note encore \mathcal{F} la variété des drapeaux complets de \mathbb{C}^n et $\Gamma_\lambda : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'application qui à un drapeau V^\bullet associe les valeurs propres de drapeau d'ellipsoïdes $E_{D_\lambda} \cap V^\bullet$. Ces applications, avec les projections naturelles $p : \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathcal{O}(\lambda)$ et $q : \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathcal{F}$ et l'involution $t : \mathrm{U}(n) \rightarrow \mathrm{U}(n)$, définissent un diagramme commutatif, illustré en figure 3.3.

Dans chaque cas, on fixe une valeur $c = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ dans l'image de F_λ , un drapeau V^\bullet dans la fibre $\Gamma_\lambda^{-1}(c)$, et on note $\alpha_\bullet = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la famille d'opérateurs hermitiens définissant le drapeau $E^\bullet = E_{D_\lambda} \cap V^\bullet$. Rappelons que, par définition, pour tout $1 \leq k \leq n$, l'opérateur α_k a valeurs propres $c_{1,k} \geq \cdots \geq c_{k,k}$ (où par convention $c_{i,n} = \lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$).

3.4.1. Fibre régulière sur une orbite générique

On suppose ici que le spectre λ est générique, et que c est une valeur régulière de F_λ , c'est-à-dire que les valeurs $c_{i,j}$ sont toutes distinctes (voir proposition 3.1.4).

Ainsi, chaque opérateur α_k a des valeurs propres distinctes, et admet donc k sous-espaces propres $W_{1,k}, \dots, W_{k,k}$ chacun de dimension 1. D'après la proposition 3.3.3, le groupe de symétrie de E^\bullet est

$$G(E^\bullet) = G_1 \times \cdots \times G_n \quad \text{avec } G_k = \mathrm{U}(W_{1,k}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{U}(W_{k,k}).$$

Chaque G_k est donc difféomorphe à un produit

$$\underbrace{\mathrm{U}(1) \times \cdots \times \mathrm{U}(1)}_{k \text{ fois}} = \mathbb{T}^k,$$

et donc le groupe de symétrie $G(E^\bullet)$ est difféomorphe à un tore de dimension

$$1 + 2 + \cdots + n = N + n.$$

Calculons maintenant $H'(E^\bullet)$. Notons L_k le supplémentaire orthogonal de V^k dans

V^{k+1} , et soit $\varphi \in H'_{k+1}$. D'après la proposition 3.3.5, φ est de la forme

$$\varphi = \varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_k \oplus \text{id}_{L_k} \in U(W_{1,1}) \oplus \cdots \oplus U(W_{1,k}) \oplus U(L_k),$$

où chaque φ_i doit vérifier $\varphi_i(w) = w$ pour tout $w \in \text{proj}_{W_{i,k}}(\alpha_{k+1}(L_k))$. Or, d'après la remarque 3.3.8, comme il n'y a pas d'égalité verticale dans le diagramme de Gelfand–Cetlin de c , le sous-espace $\text{proj}_{W_{i,k}}(\alpha_{k+1}(L_k))$ est nécessairement de dimension 1, donc égal à $W_{i,k}$. Finalement, $\varphi_i = \text{id}_{W_{i,k}}$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et donc $\varphi = \text{id}_{V^{k+1}}$.

On en déduit que $H'(E^\bullet)$ est le groupe trivial. Ainsi, $S(E^\bullet) = G(E^\bullet) \approx \mathbb{T}^{N+n}$. D'autre part, le sous-groupe $U(\underline{\lambda})$ des matrices unitaires commutant avec la matrice $D_{\underline{\lambda}} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est l'ensemble des matrices diagonales $\text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, avec $\xi_1, \dots, \xi_n \in U(1)$ (voir lemme 3.1.1). Autrement dit, $U(\underline{\lambda})$ est diffeomorphe à un produit $U(1)^n = \mathbb{T}^n$.

Ainsi, d'après le corollaire 3.3.21, la fibre $F_{\underline{\lambda}}(c)$ est diffeomorphe à un tore de dimension N , comme prédit par le théorème d'Arnold–Liouville–Mineur 1.2.6.

3.4.2. Singularité sphérique sur une orbite générique de $\mathfrak{u}(3)^*$

On prend ici $n = 3$, et un spectre générique $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$, de sorte que l'orbite générique $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ soit de dimension $2N = 6$. On fixe $c = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{2,2})$ de sorte que $c_{1,2} = c_{2,2}$. Les inégalités de Gelfand–Cetlin impliquent alors

$$c_{1,1} = c_{1,2} = c_{2,2} = \lambda_2.$$

Déterminons la fibre $F_{\underline{\lambda}}^{-1}(c)$.

Structure de $G(E^\bullet)$

En appliquant la proposition 3.3.3, on obtient :

- $G_1 = U(V^1)$,
- $G_2 = U(V^2)$,
- $G_3 = U(W_1) \oplus U(W_2) \oplus U(W_3)$,

où $V^3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$ est la décomposition de V^3 en les sous-espaces propres de α_3 , chacun de dimension 1.

Structure de $H'(E^\bullet)$

Pour tout $0 \leq k < 3$, notons L_k le supplémentaire orthogonal de V^k dans V^{k+1} . Posons $A_k = \text{proj}_{V^k}(\alpha_{k+1}(L_k)) \subset V^k$ et notons A'_k son supplémentaire orthogonal

dans V^k . D'après la proposition 3.3.5, H'_{k+1} est l'ensemble des éléments

$$\phi_k \oplus \text{id}_{L_k} \in \text{U}(V^k) \oplus \text{U}(L_k)$$

tels que pour tout $v \in A_k$, $\phi_k(v) = v$.

- Pour $k = 0$, on a $V^0 = A_0 = A'_0 = \{0\}$ et $L_0 = V^1$, d'où

$$H'_1 = \{\text{id}_{V^1}\}.$$

- Pour $k = 1$, fixons un générateur unitaire ℓ_1 de L_1 et posons $\alpha_2(\ell_1) = w_1 \oplus a_2 \ell_1 \in V^1 \oplus L_1$. D'après le lemme 3.3.4, on a alors

$$\forall v_1 \in V^1, \quad \alpha_2(v_1) = \alpha_1(v_1) \oplus \langle v_1 \mid w_1 \rangle \ell_1.$$

Mais tel que c a été choisi, on a $\alpha_1 = \lambda_2 \cdot \text{id}_{V^1}$ et $\alpha_2 = \lambda_2 \cdot \text{id}_{V^2}$. La relation précédente implique alors $\langle v_1 \mid w_1 \rangle = 0$ pour tout $v_1 \in V^1$, autrement dit $w_1 = 0$. On en déduit que $A_1 = \text{Vect}(w_1) = \{0\}$, et donc

$$H'_2 = \{\phi_1 \oplus \text{id}_{L_1} \mid \phi_1 \in \text{U}(V^1)\}.$$

- Enfin, étudions le cas $k = 2$. Comme A_2 est la projection d'un espace de dimension 1, il a lui-même dimension 0 ou 1. Ainsi, son supplémentaire A'_2 dans V^2 a dimension 1 ou 2. Or d'autre part on a

$$\text{U}(A'_2) \times \text{U}(L_2) \approx H'_3 \subset G_3,$$

ce qui au niveau des dimensions implique

$$(\dim_{\mathbb{C}} A'_2)^2 + 1 = \dim H'_3 \leq \dim G_3 = 3.$$

Ainsi, le cas $\dim_{\mathbb{C}} A'_2 = 2$ est exclu, c'est donc que A_2 et A'_2 sont deux droites complexes orthogonales dans V^2 . Le groupe H'_3 peut alors s'écrire

$$H'_3 = \{\xi_3 \cdot \text{id}_{A'_2} \oplus \text{id}_{A_2} \oplus \text{id}_{L_2} \mid \xi_3 \in \text{U}(1)\}.$$

Structure de $S(E^\bullet)$

Étudions maintenant la structure de la variété quotient

$$S(E^\bullet) = G(E^\bullet)/H'(E^\bullet).$$

Pour ce faire, on va écrire explicitement l'action de $H'(E^\bullet)$, en se plaçant dans une base unitaire $C = (u_1, u_2, u_3) \in \text{U}(3)$ telle que pour tout $1 \leq k \leq 3$, $V^k =$

$\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$ (c'est-à-dire telle que $q(C) = V^\bullet$). Mais avant ça, remarquons les deux faits suivants.

- Le sous-espace W_2 est inclus dans V^2 et, plus précisément, coïncide avec A'_2 . En effet, supposons $v_3 \in W_2 \subset V^3$, et écrivons

$$v_3 = v_2 \oplus c\ell_2 \in V^2 \oplus L_2,$$

avec ℓ_2 un générateur unitaire fixé de L_2 . Rappelons que, d'après le lemme 3.3.4, si on pose

$$\alpha_3(\ell_2) = w_2 \oplus a_3\ell_2, \quad w_2 \in V^2, \quad a_3 \in \mathbb{R},$$

alors on a

$$\alpha_3(v_2) = \alpha_2(v_2) \oplus \langle v_2 \mid w_2 \rangle \ell_2 = \lambda_2 v_2 \oplus \langle v_2 \mid w_2 \rangle \ell_2.$$

Ainsi, en projetant séparément sur V^2 et L_2 la relation $\alpha_3(v_3) = \lambda_2 v_3$ satisfaite par $v_3 \in W_2$, on obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_2 v_2 &= \lambda_2 v_2 + cw_2, \\ \lambda_2 c &= \langle v_2 \mid w_2 \rangle + ca_3. \end{cases}$$

En particulier, la première équation donne $cw_2 = 0$. Or, on a vu précédemment que $A_2 = \text{Vect}(w_2)$ a dimension 1. Ainsi $w_2 \neq 0$, c'est donc que $c = 0$, autrement dit $v_3 = v_2 \oplus 0$ appartient à V^2 . Mais alors, d'après la deuxième équation, on a

$$\langle v_2 \mid w_2 \rangle = 0,$$

d'où $v_3 = v_2$ appartient au supplémentaire orthogonal A'_2 de A_2 dans V^2 .

Ainsi, on a $W_2 \subset A'_2$, et par argument de dimension, $W_2 = A'_2$.

- Sans perte de généralité, on peut supposer $V^1 = A_2$. En effet, fixons $\phi_2 \in U(V^2) = G_2$ tel que $\phi_2(V^1) = A_2$, et posons

$$\phi = (\text{id}_{V^1}, \phi_2, \text{id}_{V^3}) \in G(E^\bullet).$$

Alors l'image directe $\phi_* V^\bullet$ de V^\bullet par ϕ vérifie $V_\phi^2 = V^2$ et $V_\phi^3 = V^3$. Par suite, si on note $c' = (c'_{1,1}, c'_{1,2}, c'_{2,2})$ l'image de $\phi_* V^\bullet$ par Γ_λ , alors on a $c'_{i,2} = c_{i,2}$ pour tout $i = 1, 2$. Mais alors les inégalités de Gelfand–Cetlin impliquent, comme précédemment,

$$c'_{1,1} = c'_{1,2} = c'_{2,2} = \lambda_2,$$

d'où finalement $\phi_* V^\bullet$ appartient à la même fibre de Γ_λ que V^\bullet . Ainsi, en

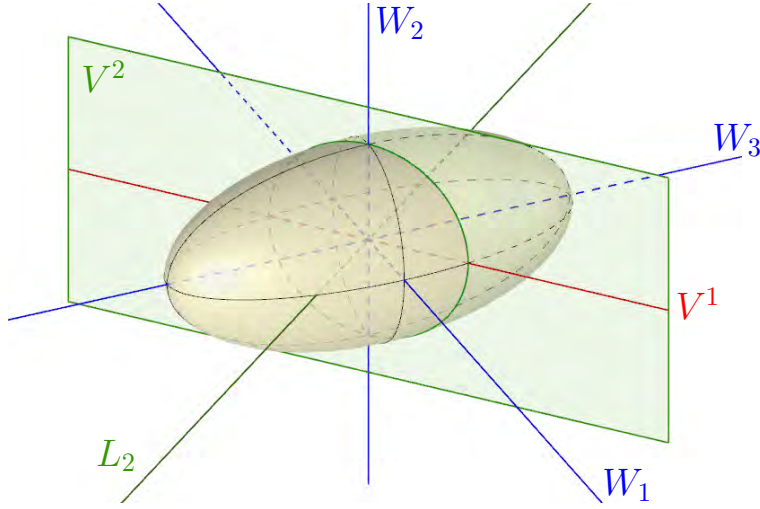


FIGURE 3.4. : Un drapeau complet dans \mathbb{C}^3 correspondant à une singularité sphérique sur orbite générique de $\mathfrak{u}(3)^*$.

remplaçant V^\bullet par $\phi_* V^\bullet$, on ne modifie pas les espaces A_k, A'_k et L_k pour $k \geq 2$, et on obtient $V^1 = A_2$.

Remarque 3.4.1. On peut interpréter géométriquement les deux faits précédents en observant la figure 3.4. On y a représenté un ellipsoïde générique E^3 dans \mathbb{C}^3 , d'axes W_1, W_2, W_3 et de rayons $r_1 < r_2 < r_3$ (rappelons que $r_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$). On observe d'abord que, pour inclure un cercle (complexe) $E^2 = E^3 \cap V^2$ de rayon r_2 dans E^3 , il faut nécessairement que W_2 soit un axe de E^2 . Cela implique notamment que W_2 est inclus dans V^2 , et que le complémentaire orthogonal L_2 de V^2 dans \mathbb{C}^3 appartient au plan engendré par W_1 et W_3 . Comme W_1, W_3 sont, par définition, préservés par α_3 , l'image $\alpha_3(L_2)$ appartient encore au plan engendré par W_1, W_3 , et donc sa projection A_2 sur V^2 est orthogonale à W_2 . Ensuite, n'importe quel ellipsoïde de dimension 1

$$E^1 = E^3 \cap V^1 = E^2 \cap V^1$$

sera également de rayon r_2 , autrement dit la valeur $c = \Gamma_\lambda(V^\bullet)$ ne dépend pas du choix de V^1 . On peut donc choisir pour V^1 n'importe quelle droite dans V^2 , par exemple A_2 .

Finalement, si on note :

- J_1 la fonction identité sur $A_2 = V_1 = \text{Vect}(u_1)$,
- J_2 la fonction identité sur $W_2 = A'_2 = L_1 = \text{Vect}(u_2)$,
- J_3 la fonction identité sur $L_2 = \text{Vect}(u_3)$,

alors on peut réécrire les groupes H_k et G_k comme suit :

$$\begin{aligned} G_1 &= \{\zeta_1 J_1 \mid \zeta_1 \in U(1)\}, & H'_1 &= \{J_1\}, \\ G_2 &= U(V^2), & H'_2 &= \{\xi_2 J_1 \oplus J_2 \mid \xi_2 \in U(1)\}, \\ G_3 &= \{\zeta_3 J_2 \oplus \psi_3 \mid \zeta_3 \in U(1), \psi_3 \in T\}, & H'_3 &= \{J_1 \oplus \xi_3 J_2 \oplus J_3 \mid \xi_3 \in U(1)\}, \end{aligned}$$

où $T = U(W_1) \oplus U(W_3) \subset U(W_1 \oplus W_3) = U(V_1 \oplus L_2)$. Dans un souci de concision, on notera :

- $(\zeta_1 ; \phi_2 ; \zeta_3 ; \psi_3)$ l'élément $(\zeta_1 J_1, \phi_2, \zeta_3 J_2 \oplus \psi_3) \in G(E^\bullet)$,
- $(\xi_2 ; \xi_3)$ l'élément $(J_1, \xi_2 J_1 \oplus J_2, J_1 \oplus \xi_3 J_2) \in H(E^\bullet)$.

Sous cette forme, la formule 3.3.11 donnant l'action de $H'(E^\bullet)$ sur $G(E^\bullet)$ s'écrit :

$$(\zeta_1 ; \phi_2 ; \zeta_3 ; \psi_3) \cdot (\xi_2 ; \xi_3) = (\xi_2^* \zeta_1 ; (J_1 \oplus \xi_3^* J_2) \circ \phi_2 \circ (\xi_2 J_1 \oplus J_2) ; \xi_3 \zeta_3 ; \psi_3).$$

Considérons alors l'application $\tilde{\varphi} : G(E^\bullet) \rightarrow U(V^2) \times T$ définie par

$$\tilde{\varphi}(\zeta_1 ; \phi_2 ; \zeta_3 ; \psi_3) = ((J_1 \oplus \zeta_3 J_2) \circ \phi_2 \circ (\zeta_1 J_1 \oplus J_2), \psi_3).$$

Cette application est $H'(E^\bullet)$ -invariante, et induit donc un difféomorphisme

$$\varphi : S(E^\bullet) \xrightarrow{\sim} U(V^2) \times T$$

d'inverse φ^{-1} défini par $\varphi^{-1}(\phi_2, \psi_3) = (1; \phi_2; 1; \psi_3) = (J_1, \phi_2, J_2 \oplus \psi_3)$ (on identifie un élément de $S(E^\bullet)$ avec son représentant dans $G(E^\bullet)$).

Structure de $S(E^\bullet)/U(\lambda)$

Reste maintenant à étudier la structure de la variété quotient $S(E^\bullet)/U(\lambda)$ pour l'action de $U(\lambda)$ sur $S(E^\bullet)$ définie par la formule 3.3.22. Remarquons que, encore une fois, comme on est sur une orbite générique, on a $U(\lambda) \approx U(1)^3$ (voir proposition 3.1.1. Explicitons cette action.

Soit $\phi = \varphi^{-1}(\phi_2, \psi_3) = (J_1, \phi_2, J_2 \oplus \psi_3)$ dans $S(E^\bullet)$. L'image directe $\phi_* C = (u_1^\phi, u_2^\phi, u_3^\phi)$ est alors donnée par :

$$\begin{cases} u_1^\phi = \bar{\phi}_1(u_1) = (J_2 \oplus \psi_3)(\phi_2(u_1)) \\ u_2^\phi = \bar{\phi}_2(u_2) = (J_2 \oplus \psi_3)(\phi_2(u_2)) \\ u_3^\phi = \bar{\phi}_3(u_3) = \psi_3(u_3). \end{cases}$$

Par commodité, on regroupera ces trois expressions sous la forme commune :

$$\forall 1 \leq k \leq 3, \quad u_k^\phi = (J_2 \oplus \psi_3) \circ (\phi_2 \oplus J_3)(u_k).$$

Soit $P = \text{diag}(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*) \in U(\lambda)$. La matrice $P^*(\phi_*C)$ a pour colonnes (u'_1, u'_2, u'_3) définies par

$$\forall 1 \leq k \leq 3, \quad u'_k = (\xi_1 I_1 \oplus \xi_2 I_2 \oplus \xi_3 I_3)(u_k^\phi)$$

où I_k désigne la fonction identité sur W_k . Remarquons que $I_2 = J_2$, et que ψ_3 est de la forme $\zeta_1 I_1 \oplus \zeta_3 I_3$ avec $\zeta_1, \zeta_3 \in U(1)$. Ainsi,

$$(\xi_1 I_1 \oplus \xi_2 I_2 \oplus \xi_3 I_3) \circ (J_2 \oplus \psi_3) \circ (\phi_2 \oplus J_3) = (J_2 \oplus \psi_3^P) \circ (\phi_2^P \oplus J_3),$$

avec

$$\begin{cases} \phi_2^P = (J_1 \oplus \xi_2 J_2) \circ \phi_2 \in G_2 \\ \psi_3^P = \xi_1 \zeta_1 I_1 \oplus \xi_3 \zeta_3 I_3 \in T. \end{cases},$$

et donc $P^*(\phi_*C) = (\phi \cdot P)_*C$ avec $\phi \cdot P = (J_1, \phi_2^P, J_2 \oplus \psi_3^P) = \varphi^{-1}(\phi_2^P, \psi_3^P)$.

Remarquons que

$$(\phi_2^P)^{-1}(u_1) = (\phi_2)^{-1} \circ (J_1 \oplus \xi_2^* J_2)(u_1) = (\phi_2)^{-1}(u_1).$$

Autrement dit, l'application

$$\tilde{\Psi} \left| \begin{array}{ccc} S(E^\bullet) & \longrightarrow & S^3 \\ (J_1, \phi_2, J_2 \oplus \psi_3) & \longmapsto & \phi_2^{-1}(u_1) \end{array} \right.$$

à valeurs dans la sphère unité S^3 de V^2 est constante le long des orbites de l'action de $U(\lambda)$. Réciproquement, supposons $(\phi_2)^{-1}(u_1) = (\phi'_2)^{-1}(u_1) = v_1$ pour deux éléments $\phi = \varphi^{-1}(\phi_2, \psi_3)$ et $\phi' = (\phi'_2, \psi'_3)$ dans $S(E^\bullet)$. Notons $v_2 = (\phi_2)^{-1}(u_2)$ et $v'_2 = (\phi'_2)^{-1}(u_2)$. Comme ϕ et ϕ' sont unitaires et que (u_1, u_2) est une base orthonormale de V^2 , (v_1, v_2) et (v_1, v'_2) sont aussi deux bases unitaires de V^2 . Par suite, il existe $\xi_2 \in U(1)$ tel que $v'_2 = \xi_2 v_2$, et donc $(\phi'_2)^{-1} = \phi_2^{-1} \circ (J_1 \oplus \xi_2^* J_2)$. Par ailleurs, ψ_3 et ψ'_3 ont les mêmes sous-espaces propres W_1 et W_3 , de dimension 1 chacun, donc il existe $\xi_1, \xi_3 \in U(1)$ tels que $\psi'_3 = (\xi_1 I_1 \oplus \xi_3 I_3) \circ \psi_3$. Finalement, en posant $P = \text{diag}(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$, on a $\phi'_2 = \phi_2^P$ et $\psi'_3 = \psi_3^P$, autrement dit ϕ et ϕ' appartiennent à la même orbite pour l'action de $U(\lambda)$ sur $S(E^\bullet)$.

Ainsi, l'application $\tilde{\Psi}$ passe au quotient en un difféomorphisme $\Psi : S(E^\bullet)/U(\lambda) \rightarrow S^3$, et en appliquant le corollaire 3.3.21, on retrouve le résultat d'Alamiddine :

Proposition 3.4.2 [Ala09]. *Soit $F_\lambda : \mathcal{O}(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application moment du système de Gelfand–Cetlin sur une orbite coadjointe générique de $\mathfrak{u}(3)^*$.*

Alors la fibre singulière

$$F_\lambda^{-1}(\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2)$$

est une sous-variété plongée de $\mathcal{O}(\lambda)$ difféomorphe à la sphère S^3 .

4. Systèmes sur la variété grassmannienne des 2-plans dans \mathbb{C}^n

Dans ce chapitre, on s'intéresse à une famille de systèmes Hamiltoniens intégrables définie par Nohara et Ueda [NU14] sur la variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$, pour un $n \geq 3$ fixé. On commence par rappeler la définition de ces systèmes, et la relation qu'ils entretiennent avec les deux familles de systèmes étudiées précédemment : les systèmes de pliage de polygones et les système de Gelfand–Cetlin. Ensuite, en utilisant justement la relation avec les systèmes de pliage de polygones et les résultats du chapitre 2 sur ces systèmes, on montre que les systèmes hamiltoniens de Nohara et Ueda présentent eux-aussi la particularité que toutes les fibres de l'application moment, y compris les fibres singulières, sont des sous-variétés plongées.

4.1. Définitions et notations

Rappelons d'abord les définitions de la variété $\text{Gr}(2, n)$ et du système intégrable sur celle-ci.

4.1.1. La variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$

Montrons, dans un premier temps, que $\text{Gr}(2, n)$ est un espace homogène puis, plus précisément, que c'est un quotient symplectique.

Structure d'espace homogène

Soit $n \geq 3$. La variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$ désigne l'ensemble des plans¹ de \mathbb{C}^n . On peut la définir et la munir d'une structure de variété lisse comme suit.

Notons

$$V_2(\mathbb{C}^n) = \{A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C}) \mid A^*A = I_2\}$$

¹c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels de dimension complexe égale à 2

la *variété des repères* (des plans de \mathbb{C}^n), où $A^* = {}^t\bar{A}$ désigne la matrice adjointe de A , et I_2 est la matrice identité. Justifions cette dénomination.

Notons en colonnes $A = (\underline{z}, \underline{w})$ avec $\underline{z}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n$. Si on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit Hermitien canonique sur \mathbb{C}^n et $\|\cdot\|$ la norme associée, on peut vérifier que

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{z}^1 & \cdots & \bar{z}^n \\ \bar{w}^1 & \cdots & \bar{w}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^1 & w^1 \\ \vdots & \vdots \\ z^n & w^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\underline{z}\|^2 & \langle \underline{w} | \underline{z} \rangle \\ \langle \underline{z} | \underline{w} \rangle & \|\underline{w}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la variété $V_2(\mathbb{C}^n)$ s'assimile naturellement à l'ensemble des paires de vecteurs $(\underline{z}, \underline{w})$ formant une famille orthonormale, c'est-à-dire l'ensemble de tous les repères engendrant un plan dans \mathbb{C}^n .

Deux repères $A_1 = (\underline{z}_1, \underline{w}_1)$ et $A_2 = (\underline{z}_2, \underline{w}_2)$ engendrent le même plan si et seulement si $\underline{z}_2, \underline{w}_2$ appartiennent tous les deux à $\text{Vect}(\underline{z}_1, \underline{w}_1)$, c'est-à-dire si il existe $p_{1,1}, p_{2,1}, p_{1,2}, p_{2,2} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\begin{cases} \underline{z}_2 &= p_{1,1}\underline{z}_1 + p_{2,1}\underline{w}_1, \\ \underline{w}_2 &= p_{1,2}\underline{z}_1 + p_{2,2}\underline{w}_1. \end{cases}$$

On a alors $A_2 = A_1 P$, où $P = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 2}$ n'est autre que la matrice de passage d'une base à l'autre dans V . Comme les deux bases sont orthonormales, P est une matrice unitaire.

Ainsi, on définit la *variété grassmannienne* des plans de \mathbb{C}^n comme le quotient

$$\text{Gr}(2, n) = V_2(\mathbb{C}^n)/\text{U}(2)$$

pour l'action de $\text{U}(2)$ sur $V_2(\mathbb{C}^n)$ par multiplication à droite. Notons que $V_2(\mathbb{C}^n)$ est une variété (réelle) lisse de dimension (réelle) $4n - 4$, et l'action du groupe de Lie $\text{U}(2)$ sur $V_2(\mathbb{C}^n)$ est lisse et transitive. Ainsi, le quotient $\text{Gr}(2, n)$ est une variété (réelle) lisse de dimension (réelle) $4n - 8$.

Structure de quotient symplectique

Soit \mathbb{C}^2 , avec coordonnées notées (z, w) , muni de la structure symplectique standard

$$\omega_{\mathbb{C}^2} = \frac{i}{2}(dz \wedge d\bar{z} + dw \wedge d\bar{w}).$$

En voyant $X_1 = (z_1, w_1), X_2 = (z_2, w_2) \in \mathbb{C}^2$ comme des matrices de taille 1×2 , on peut encore écrire

$$\omega_{\mathbb{C}^2}(X_1, X_2) = \frac{i}{2}(\text{Tr}(X_1^* X_2) - \text{Tr}(X_2^* X_1)).$$

Considérons l'action du groupe de Lie $U(2)$ sur \mathbb{C}^2 , toujours vu comme $\mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C})$, par multiplication à droite. Rappelons que l'algèbre de Lie de $U(2)$ est

$$\mathfrak{u}(2) = \{H \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) \mid H^* = -H\}.$$

Le dual $\mathfrak{u}(2)^*$ est d'ordinaire identifié avec $\mathfrak{u}(2)$ via la forme non-dégénérée

$$(H_1, H_2) \mapsto \text{Tr}(H_1 H_2),$$

mais, comme dans le chapitre 3, on introduira ici une multiplication par i pour se ramener plutôt à $i\mathfrak{u}(2)$ qui n'est autre que l'espace $\mathcal{H}(2)$ des matrices hermitiennes de taille 2×2 . Finalement, le crochet de dualité usuel $(\cdot \mid \cdot) : \mathfrak{u}(2)^* \times \mathfrak{u}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ correspondra dans notre cas à

$$\left| \begin{array}{ll} \mathcal{H}(2) \times \mathfrak{u}(2) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, H) & \longmapsto -i \text{Tr}(AH) \end{array} \right.$$

Pour tout $H \in \mathfrak{u}(2)$, l'action de $U(2)$ sur \mathbb{C}^2 induit un champ de vecteur infinitésimal $\rho(H)$ sur \mathbb{C}^2 :

$$\rho(H)_X = \left. \frac{\partial}{\partial t} (X \cdot \exp(tH)) \right|_{t=0} = XH.$$

Considérons l'application $\mu : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{H}(2)$ définie pour tout $X = (z, w) \in \mathbb{C}^2$ par

$$\mu(X) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} |z|^2 & \bar{z}w \\ z\bar{w} & |w|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} X^* X.$$

Pour tout $H \in \mathfrak{u}(2)$ on a une application induite $(\mu \mid H) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(\mu \mid H)(X) = (\mu(X) \mid H) = -\frac{i}{2} \text{Tr}(X^* X H).$$

La différentielle en $X_1 \in \mathbb{C}^2$ de cette application s'exprime alors sous la forme

$$d(\mu \mid H)_{X_1}(X_2) = -\frac{i}{2} (\text{Tr}(X_1^* X_2 H) + \text{Tr}(X_2^* X_1 H)).$$

En utilisant que $H^* = -H$, on peut encore écrire :

$$d(\mu \mid H)_{X_1}(X_2) = \frac{i}{2} (\text{Tr}(\rho(H)^*_{X_1} X_2) - \text{Tr}(X_2^* \rho(H)_{X_1})) = \omega_{\mathbb{C}^2}(\rho(H)_{X_1}, X_2).$$

Ainsi, sous l'identification $\mathfrak{u}(2)^* = \mathcal{H}(2)$ précédente, $\mu : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathcal{H}(2)$ est l'applica-

tion moment de l'action de $U(2)$ sur \mathbb{C}^2 .

Considérons maintenant l'action de $U(2)$ sur $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ par multiplication à droite. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ et $P \in U(2)$, la i -ème ligne du produit AP n'est autre que le produit matriciel $(z^i, w^i)P$, autrement dit sous l'identification naturelle

$$\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \times \cdots \times \mathbb{C}^2 = (\mathbb{C}^2)^n,$$

l'action de $U(2)$ sur $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ est simplement l'action diagonale obtenue en effectuant sur chaque composante de $(\mathbb{C}^2)^n$ l'action par multiplication à droite que nous venons d'étudier. En particulier, c'est encore une action hamiltonienne et son application moment $\mu_{U(2)} : \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}(2)$ est la somme des applications moment sur chaque composante :

$$\mu_{U(2)}(\underline{z}, \underline{w}) = \sum_{j=1}^n \mu(z^j, w^j) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|\underline{z}\|^2 & \langle \underline{w} | \underline{z} \rangle \\ \langle \underline{z} | \underline{w} \rangle & \|\underline{w}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la variété des repères $V_2(\mathbb{C}^n)$ est exactement le niveau $\mu_{U(2)}^{-1}(\frac{1}{2}I_2)$ de cette application moment. Ainsi, la variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$ est le quotient symplectique (au point $\frac{1}{2}I_2$) de $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$ par l'action hamiltonienne (libre et propre) de $U(2)$. En particulier, $\text{Gr}(2, n)$ est bien muni d'une structure symplectique, à savoir la projection naturelle de la structure symplectique produit

$$p_1^* \omega_{\mathbb{C}^2} + \cdots + p_n^* \omega_{\mathbb{C}^2}$$

sur $(\mathbb{C}^2)^n$, où $p_i : (\mathbb{C}^2)^n \rightarrow \mathbb{C}^2$ est la projection de la i -ème composante du produit. Dans tout ce chapitre, c'est cette structure symplectique que l'on considèrera.

4.1.2. Système intégrable sur $\text{Gr}(2, n)$

Étant donné un sous-ensemble I de $\{1, \dots, n\}$ on définit un sous groupe U_I de $U(n)$ comme l'ensemble des matrices $C = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $U(n)$ telles que

$$(c_{i,j})_{i,j \in I} \in U(|I|), \quad c_{i,j} = \delta_{i,j} \text{ pour tout } (i,j) \notin I \times I,$$

où $|I|$ est le nombre d'éléments dans I et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. Par exemple pour $n = 5$ et $I = \{2, 3, 5\}$, U_I est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{1,1} & p_{1,2} & 0 & p_{1,3} \\ 0 & p_{2,1} & p_{2,2} & 0 & p_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & p_{3,1} & p_{3,2} & 0 & p_{3,3} \end{pmatrix}$$

avec $(p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathrm{U}(3)$ une matrice unitaire de taille 3.

Le groupe U_I agit par multiplication à gauche sur $V_2(\mathbb{C}^n)$, et cette action est correctement définie sur le quotient $\mathrm{Gr}(2, n)$. En fait, on peut montrer que l'action de U_I sur $\mathrm{Gr}(2, n)$ est une action Hamiltonienne, d'application moment $\mu_I : \mathrm{Gr}(2, n) \rightarrow \mathrm{i.u}(|I|)$ définie par :

$$\mu_I(z, \underline{w}) = \left(\frac{z^i \bar{z}^j + w^i \bar{w}^j}{2} \right)_{i,j \in I}.$$

Étant donnée $A = (z, \underline{w}) \in V_2(\mathbb{C}^n)$, si on définit $A_I = (z_I, \underline{w}_I)$ la sous-matrice de A obtenue en gardant seulement les lignes correspondant aux indices dans I , on peut vérifier que

$$\mu_I(z, \underline{w}) = \frac{1}{2} A_I A_I^*.$$

Ainsi, la matrice $\mu_I(z, \underline{w})$ est hermitienne de rang au plus 2. Notons

$$\lambda_I^{(1)}(z, \underline{w}) \geq \lambda_I^{(2)}(z, \underline{w}) \geq 0 \geq \dots \geq 0$$

ses valeurs propres.

Comme dans le chapitre 2, choisissons $n - 3$ diagonales disjointes d_1, \dots, d_{n-3} dans un polygone planaire convexe à n côtés. Les dimensions du polygone n'ont pas d'importance et le choix de ces diagonales est purement combinatoire. Si d_k relie le i -ième sommet du polygone au j -ième sommet, avec $1 \leq i < j \leq n$, on posera $I_k = \{i, i + 1, \dots, j - 1\}$. On a alors la proposition suivante, à comparer avec la proposition 2.1.3.

Proposition 4.1.1 [NU14, proposition 4.5]. *Pour tout choix de diagonales disjointes d_1, \dots, d_{n-3} , les fonctions de la famille*

$$\{\mu_{\{1\}}, \dots, \mu_{\{n\}}, \lambda_{I_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{I_{n-3}}^{(1)}, \lambda_{I_1}^{(2)}, \dots, \lambda_{I_{n-3}}^{(2)}\}$$

commutent deux à deux pour le crochet de Poisson sur $\mathrm{Gr}(2, n)$.

Cette famille contient $3n - 6$ fonctions alors que $\mathrm{Gr}(2, n)$ a dimension $2 \times (2n - 4)$, elle sont donc fonctionnellement liées. En fait, toujours en reprenant le vocabulaire et les notations du chapitre 2, chaque face adaptée $\Delta_{i,j,k}$ induit une relation de dépendance entre trois de ces fonctions. Notons $J_1 = \{i, i + 1, \dots, j - 1\}$, $J_2 = \{j, j + 1, \dots, k - 1\}$ et $J_3 = J_1 \sqcup J_2 = \{i, i + 1, \dots, k - 1\}$. Alors $U_{J_1} \times U_{J_2}$ est un sous-groupe U_{J_3} , ainsi au niveau des applications moment on doit avoir une relation de la forme :

$$\mu_{J_3} = \begin{pmatrix} \mu_{J_1} & * \\ * & \mu_{J_2} \end{pmatrix}.$$

Or par définition, chaque côté d'une face adaptée est soit un côté du polygone, soit l'une des $n - 3$ diagonales choisies. Ainsi, chaque J_k est soit un singleton $\{i_k\}$, soit un intervalle I_{j_k} . Ainsi la relation

$$\mathrm{Tr}(\mu_{J_3}) = \mathrm{Tr}(\mu_{J_1}) + \mathrm{Tr}(\mu_{J_2})$$

peut être mis sous la forme d'une relation de dépendance linéaire entre plusieurs des fonctions données dans la proposition ci-dessus.

Posons :

$$\begin{cases} \psi_{(i)} = \mu_{\{i\}} & \text{pour tout } 1 \leq i \leq n - 1, \\ \psi_{I_j} = \lambda_{I_j}^{(2)} & \text{pour tout } 1 \leq j \leq n - 3. \end{cases}$$

Les $2n - 4$ fonctions définies ci-dessus sont fonctionnellement indépendantes, et plus généralement on a la proposition suivante :

Proposition 4.1.2 [NU14, proposition 4.6]. *L'application*

$$\Psi = (\psi_{I_1}, \dots, \psi_{I_{n-3}}, \psi_{(1)}, \dots, \psi_{(n-1)}) : \mathrm{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$$

définit un système Hamiltonien complètement intégrable sur $\mathrm{Gr}(2, n)$.

4.2. Lien avec les systèmes précédents

On peut établir des relations entre le système défini dans ce chapitre, et ceux définis dans les chapitres précédents : le système de pliage de polygones sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$, et le système de Gelfand–Cetlin sur un orbite coadjointe $\mathcal{O}(\lambda)$ de $\mathfrak{u}(n)^*$.

4.2.1. Avec le système de pliage de polygones

Faisons d'abord le lien entre le système défini par Nohara et Ueda sur la variété grassmannienne $\mathrm{Gr}(2, n)$, et le système de pliage de polygones défini par Kapovich et Millson sur l'espace de configuration $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ des polygones à n côtés de taille \underline{r} , étudié dans le chapitre 2.

Polygone associé à un repère dans \mathbb{C}^n

Soit

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$$

l'algèbre à division des quaternions, où i, j, k sont les trois générateurs usuels, satisfaisant les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

On a une identification naturelle entre les éléments $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et les quaternions imaginaires $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in \mathbb{IH}$.

L'ensemble des polygones de taille $\underline{r} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ dans $\mathbb{IH} \approx \mathbb{R}^3$ est

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}} = \{\underline{q} = (q^1, \dots, q^n) \in (\mathbb{IH})^n \mid q^1 + \dots + q^n = 0, \|q^1\| = r_1, \dots, \|q^n\| = r_n\}.$$

Notons qu'on s'autorise désormais à travailler avec des polygones *impropres*, c'est-à-dire dont au moins un des côtés est nul. Plus généralement, sans fixer de taille \underline{r} , on appellera polygone dans \mathbb{IH} tout n -uplet $\underline{q} = (q^1, \dots, q^n) \in (\mathbb{IH})^n$ satisfaisant la relation de fermeture

$$q^1 + \dots + q^n = 0.$$

Soit $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{IH}$ l'application définie par $\varphi(q) = \bar{q}\mathbf{i}q$, ou de manière équivalente, par

$$\varphi(z + w\mathbf{j}) = \mathbf{i}(|z|^2 - |w|^2 + 2\bar{z}w\mathbf{j}).$$

L'image par φ de la sphère (3-dimensionnelle) de rayon \sqrt{r} de \mathbb{H} est exactement la sphère (2-dimensionnelle) de rayon r de \mathbb{IH} . Pour tous $\underline{z}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\sum_{i=1}^n \varphi(z^i + w^i\mathbf{j}) = \mathbf{i}(\|\underline{z}\|^2 - \|\underline{w}\|^2 + 2\langle \underline{w} \mid \underline{z} \rangle \mathbf{j}).$$

En particulier, si $(\underline{z}, \underline{w}) \in V_2(\mathbb{C}^n)$, alors le n -uplet

$$\tilde{\Phi}(\underline{z}, \underline{w}) = (\varphi(z^1 + w^1\mathbf{j}), \dots, \varphi(z^n + w^n\mathbf{j}))$$

est un polygone dans \mathbb{IH} , de périmètre

$$|\tilde{\Phi}(\underline{z}, \underline{w})| = \sum_{i=1}^n \|\varphi(z^i + w^i\mathbf{j})\|_{\mathbb{IH}} = \sum_{i=1}^n \|z^i + w^i\mathbf{j}\|_{\mathbb{H}}^2 = \|\underline{z}\|^2 + \|\underline{w}\|^2 = 2.$$

Notons $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ l'ensemble des polygones de périmètre 2 dans \mathbb{IH} . On vient de définir une application lisse surjective $\tilde{\Phi} : V_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$.

Cette application n'est pas injective, plusieurs repères pouvant donner un même polygone dans \mathbb{IH} . Notons $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$ l'ensemble des polygones *propres* de périmètre 2 (c'est-à-dire dont tous les côtés sont non-nuls), et T_n le tore maximal du groupe $U(n)$ (l'ensemble des matrices diagonales dans $U(n)$), agissant sur $V_2(\mathbb{C}^n)$ par multiplication à gauche. On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.2.1 Hausmann, Knutson [HK97, théorème 3.6]. *La restriction $\tilde{\Phi}^{\text{propre}}$ de $\tilde{\Phi} : V_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ au-dessus de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$ est un T_n -fibré principal lisse.*

Configuration de polygone associée à un plan de \mathbb{C}^n

Notons η l'inclusion classique de \mathbb{H} dans l'ensemble de matrice $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, définie par

$$\eta(z + wj) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}.$$

C'est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres injectif, d'image

$$\eta(\mathbb{H}) = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AA^* = \lambda I_2, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\eta(\mathbb{H})$ est stable par multiplication à gauche ou à droite par une matrice $P \in U(2)$. Ainsi on définit deux actions de $U(2)$ sur \mathbb{H} , une à gauche et une à droite, en tirant en arrière par η les actions par multiplication matricielle à gauche et à droite sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En particulier, pour l'action à droite, en se restreignant à la première ligne de $\eta(z + wj)$ on remarque que pour tout $P \in U(2)$,

$$(z_2, w_2) = (z_1, w_1)P \iff z_2 + w_2j = (z_1 + w_1j) \cdot P.$$

De plus, pour l'application $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{IH}$ définie précédemment on a la relation suivante :

$$\forall q \in \mathbb{H}, \forall P \in U(2), \quad \varphi(q \cdot P) = P^{-1} \cdot \varphi(q) \cdot P. \quad (4.2.2)$$

Notons que pour tout $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, on a

$$\text{Tr}(\eta(q_1)\eta(q_2)^*) = 2\text{Re}(z_1\bar{z}_2 + w_1\bar{w}_2) = 2\langle q_1 \mid q_2 \rangle_{\mathbb{H}},$$

c'est-à-dire que η préserve (à une constante multiplicative près) les produit scalaires usuels sur \mathbb{H} et $\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{C})$. Utilisant cette relation et la définition des actions de $U(n)$ sur \mathbb{H} , on peut alors montrer que la transformation

$$t_P : \quad q \longmapsto P^{-1} \cdot q \cdot P$$

est une isométrie de \mathbb{H} , qu'on peut restreindre à une isométrie de \mathbb{IH} . En effet, on vérifie aisément que t_P préserve \mathbb{IH} , soit en remarquant que les quaternions imaginaires sont caractérisés par l'équivalence suivante :

$$q \in \mathbb{IH} \iff \text{Tr}(\eta(q)) = 0,$$

soit en utilisant la relation 4.2.2.

Finalement, pour tout $P \in U(2)$, les polygones $\tilde{\Phi}((z, w)P)$ et $\tilde{\Phi}(z, w)$ sont égaux modulo l'isométrie $t_P \in \text{SO}(\mathbb{IH})$. Ainsi l'application $\tilde{\Phi}$ induit une application bien définie

$$\Phi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}/\text{SO}(\mathbb{IH}) = \mathcal{M}_{(2)}$$

à valeurs dans l'ensemble des configurations de polygones de périmètre 2 dans $\mathbb{IH} = \mathbb{R}^3$.

L'action du tore maximal T_n sur $V_2(\mathbb{C}^n)$ par multiplication à gauche descend en une action bien définie sur $\text{Gr}(2, n)$. Toutefois cette action n'est plus effective : son centre est le sous-groupe $\Delta = U(1)$ des matrices d'homothétie dans $U(n)$. Notons $\mathcal{M}_{(2)}^{\text{propre}}$ l'ensemble des configurations de polygones propres de périmètre 2, et $\mathcal{M}_{(2)}^{\text{propre,nd}}$ la sous-variété dense des configurations de polygones non-dégénérés. On a alors un analogue de la proposition 4.2.1.

Proposition 4.2.3 Hausmann, Knutson [HK97, théorème 3.9]. *La restriction Φ^{propre} de $\Phi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathcal{M}_{(2)}$ au-dessus de $\mathcal{M}_{(2)}^{\text{propre,nd}}$ est un (T_n/Δ) -fibré principal lisse.*

L'action du tore maximal T_n sur $\text{Gr}(2, n)$ est elle aussi hamiltonienne. Son application moment $\mu_{T_n} : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\mu_{T_n}(z, w) = \left(\frac{|z^1|^2 + |w^1|^2}{2}, \dots, \frac{|z^n|^2 + |w^n|^2}{2} \right).$$

En remarquant que $\|\varphi(z^i + w^i j)\|_{\mathbb{IH}} = |z^i|^2 + |w^i|^2$, on vérifie alors que pour toute taille $\underline{r} \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, on a

$$\Phi^{-1}(\mathcal{M}_{\underline{r}}) = \mu_{T_n}^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot \underline{r}\right).$$

En particulier pour un taille $\underline{r} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ « propre », la proposition 4.2.3 nous permet de retrouver le résultat suivant :

Proposition 4.2.4 Nohara, Ueda [NU14, proposition 2.2]. *L'espace $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ des configurations de polygones de taille \underline{r} dans \mathbb{IH} est isomorphe au quotient symplectique au point $\frac{1}{2}\underline{r}$ de $\text{Gr}(2, n)$ par l'action de T_n .*

Lien entre les deux systèmes

Supposons fixée la donnée combinatoire de $n - 3$ diagonales disjointes d_1, \dots, d_{n-3} dans un polygone planaire convexe à n côtés. Comme précédemment, notons I_1, \dots, I_{n-3} les intervalles d'entiers connexes correspondants. Pour ce choix de diagonales, considérons d'une part le système hamiltonien intégrable sur $\text{Gr}(2, n)$ défini dans la section 4.1.2, d'application moment

$$\Psi = (\psi_{I_1}, \dots, \psi_{I_{n-3}}, \psi_{(1)}, \dots, \psi_{(n-1)}) : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4},$$

et d'autre part le système de pliage de polygones sur $\mathcal{M}_{\underline{r}}$ défini dans le chapitre 2, d'application moment

$$F = (f_1, \dots, f_{n-3}) : \mathcal{M}_{\underline{r}} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}.$$

Comme précédemment, on notera aussi $\tilde{\Psi} = (\tilde{\psi}_{I_1}, \dots, \tilde{\psi}_{I_{n-3}}, \tilde{\psi}_{(1)}, \dots, \tilde{\psi}_{(n-1)})$ et $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{n-3})$ les applications relevées à $V_2(\mathbb{C}^n)$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ respectivement.

On étendra aussi naturellement F à une fonction lisse

$$F = (f_1, \dots, f_{n-3}) : \mathcal{M}_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3},$$

notée encore F . On définira de même $\tilde{F} : \tilde{\mathcal{M}}_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}^{n-3}$. Notons aussi $\ell_k : \mathcal{M}_{(2)} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application continue sur $\mathcal{M}_{(2)}$ et lisse sur un ouvert dense, définie par

$$\ell_k(\underline{q}) = \left\| \sum_{i \in I_k} q^i \right\|_{\mathbb{H}},$$

ou de manière équivalente par la relation $\ell_k^2 = 2f_k$. La proposition suivante, dont on rappelle ici la preuve, explicite comment l'application $\Phi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathcal{M}_{(2)}$ permet de relier ces deux applications moment.

Proposition 4.2.5 Nohara, Ueda [NU14, proposition 4.6]. *Pour tout $1 \leq k \leq n-3$, on a la relation suivante :*

$$4\psi_{I_k} = 2 \sum_{i \in I} \psi_{(i)} - (\ell_k \circ \Phi) \quad (4.2.6)$$

En particulier, si $\underline{r} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ est une taille fixée, alors pour tout $(z, \underline{w}) \in \Phi^{-1}(\mathcal{M}_{\underline{r}})$ on a :

$$4\psi_{I_k}(z, \underline{w}) = \sum_{i \in I} r_i - (\ell_k \circ \Phi)(z, \underline{w}).$$

Ainsi, pour tout $\underline{c} = (c_1, \dots, c_{n-3}) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{n-3}$,

$$\Phi(z, \underline{w}) \in F^{-1}(\underline{c}) \subset \mathcal{M}_{\underline{r}} \iff \begin{cases} \forall 1 \leq i \leq n-1, & 2\psi_{(i)}(z, \underline{w}) = r_i, \\ \forall 1 \leq k \leq n-3, & 4\psi_{I_k}(z, \underline{w}) = \sum_{i \in I_k} r_i - \sqrt{2c_k}. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $A = (z, \underline{w}) \in V_2(\mathbb{C}^n)$. On a défini $\lambda_{I_k}^{(1)}(A)$ et $\lambda_{I_k}^{(2)}(A)$ comme les deux plus grandes valeurs propres de la matrice

$$\mu_{I_k}(A) = \frac{1}{2} A_{I_k} A_{I_k}^*,$$

ou de manière équivalente, comme les deux valeurs propres de

$$\frac{1}{2} A_{I_k}^* A_{I_k} = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_k} \begin{pmatrix} |z^i|^2 & \bar{z}^i w^i \\ z^i \bar{w}^i & |w^i|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \|z_{I_k}\|^2 & \langle w_{I_k} | z_{I_k} \rangle \\ \langle z_{I_k} | w_{I_k} \rangle & \|w_{I_k}\|^2 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$S = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}A_{I_k}^* A_{I_k}\right) = \sum_{i \in I_k} \frac{|z^i|^2 + |w^i|^2}{2} = \sum_{i \in I_k} \psi_{(i)}(\underline{z}, \underline{w})$$

et

$$P = \det\left(\frac{1}{2}A_{I_k}^* A_{I_k}\right) = \frac{\|\underline{z}_{I_k}\|^2 \|\underline{w}_{I_k}\|^2 - |\langle \underline{z}_{I_k} | \underline{w}_{I_k} \rangle|^2}{4},$$

de sorte que $\lambda_{I_k}^{(1)}(A)$ et $\lambda_{I_k}^{(2)}(A)$ soient les racines du polynôme $X^2 - SX + P$.
Remarquons alors que

$$\begin{aligned} (\ell_k \circ \Phi(\underline{z}, \underline{w}))^2 &= \left\| \sum_{i \in I_k} \varphi(z^i + w^i \mathbf{j}) \right\|^2 \\ &= \|(\|\underline{z}_{I_k}\|^2 - \|\underline{w}_{I_k}\|^2) + 2\langle \underline{w}_{I_k} | \underline{z}_{I_k} \rangle \mathbf{j}\|^2 \\ &= (\|\underline{z}_{I_k}\|^2 - \|\underline{w}_{I_k}\|^2)^2 + 4|\langle \underline{z}_{I_k} | \underline{w}_{I_k} \rangle|^2 \\ &= (\|\underline{z}_{I_k}\|^2 + \|\underline{w}_{I_k}\|^2)^2 - 4(\|\underline{z}_{I_k}\|^2 \|\underline{w}_{I_k}\|^2 - |\langle \underline{z}_{I_k} | \underline{w}_{I_k} \rangle|^2) \\ &= 4S^2 - 16P. \end{aligned}$$

Ainsi, le polynôme $X^2 - SX + P$ a pour discriminant

$$\Delta = S^2 - 4P = \frac{1}{4}(\ell_k \circ \Phi(\underline{z}, \underline{w}))^2$$

et sa plus petite racine $\psi_{I_k}(z, w) = \lambda_{I_k}^{(2)}(z, w)$ vaut

$$\frac{S - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_k} \psi_{(i)}(\underline{z}, \underline{w}) - \frac{1}{4}(\ell_k \circ \Phi(\underline{z}, \underline{w})). \quad \square$$

Remarque 4.2.7. Avant de conclure cette section, notons que la formule 4.2.6 est aussi vraie au niveau des applications relevées.

4.2.2. Avec le système de Gelfand–Cetlin

Faisons maintenant le lien avec le système de Gelfand–Cetlin défini dans le chapitre 3.

Pour la configuration en chenille

Plaçons-nous dans le cas de la configuration en chenille, c'est-à-dire pour lequel $I_k = \{1, 2, \dots, k+1\}$ pour tout $1 \leq k \leq n-3$. Dans ce cas, pour tout $A = (\underline{z}, \underline{w})$

dans $V_2(\mathbb{C}^n)$, la matrice

$$M_{k+1} = \frac{1}{2} A_{I_k} A_{I_k}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{z^i \bar{z}^j + w^i \bar{w}^j}{2} \right)_{i,j \in I_k}$$

n'est autre que la sous-matrice supérieure gauche de taille $(k+1) \times (k+1)$ de $M = \frac{1}{2} A A^*$. Ainsi, les valeurs propres de M_{k+1} sont les valeurs :

$$\lambda_{I_k}^{(1)}(A) \geq \lambda_{I_k}^{(2)}(A) \geq 0 = \dots = 0$$

définies précédemment. Utilisant que $\lambda_{I_k}^{(1)}(A) + \lambda_{I_k}^{(2)}(A) = \text{Tr}(M_{k+1})$ on obtient les relations

$$\lambda_{I_k}^{(2)} = \psi_{I_k}, \quad (4.2.8)$$

$$\lambda_{I_k}^{(1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \psi_{(i)} - \psi_{I_k}. \quad (4.2.9)$$

Si on généralise à k valant 0, $n-2$ ou $n-1$, valeurs pour lesquelles l'intervalle I_k , la matrice M_{k+1} et donc les fonctions $\lambda_{I_k}^{(1)}$ et $\lambda_{I_k}^{(2)}$ sont bien définis, on obtient des relations similaires :

$$\begin{cases} k=0 : & \lambda_{I_0}^{(1)} = \psi_{(1)}, \quad \lambda_{I_0}^{(2)} = 0, \\ k=n-2 : & \lambda_{I_{n-2}}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{I_{n-2}}^{(2)} = \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_{(i)}, \\ k=n-1 : & \lambda_{I_{n-1}}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_{I_{n-1}}^{(2)} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

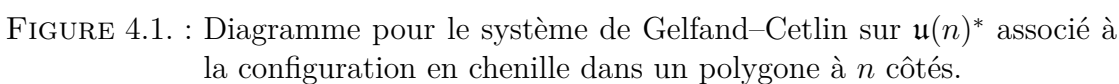
En particulier, la matrice $M = \frac{1}{2} A A^*$ appartient toujours à l'orbite coadjointe $\mathcal{O}(\underline{\lambda})$ définie dans le chapitre 3 pour

$$\underline{\lambda} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Sur cette orbite non-générique, on a rappelé dans le chapitre 3 qu'il existait un système Hamiltonien intégrable, le système de Gelfand–Cetlin, dont l'application moment (généralisée)

$$F_{\underline{\lambda}} = (\gamma_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} : \mathcal{O}(\underline{\lambda}) \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$$

est construite en définissant $\gamma_{i,j}(M)$ comme la i -ième plus grande valeur propre de la sous matrice de taille $j \times j$ de M . En raison des inégalités apparaissant dans



Les formules 4.2.9, 4.2.8 et leurs généralisations permettent d'exprimer, pour tout $A \in V_2(\mathbb{C}^n)$, la valeur de $\Psi(A)$ en fonction de $F_\lambda(M)$, où $M = \frac{1}{2}AA^*$. Plus précisément, elles définissent une transformation affine $T : \mathbb{R}^{2n-4} \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$ inversible telle que pour tout $A \in V_2(\mathbb{C}^A)$,

Or, l'application $\varphi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathcal{O}(\underline{\lambda})$ définie par $\varphi(A) = \frac{1}{2}AA^*$ est un difféomorphisme [HK97, (3.13)]. Ainsi, en appliquant le corollaire 3.3.21, on obtient que les fibres du système de Nohara et Ueda pour la configuration en chenille sur $\text{Gr}(2, n)$ sont des sous-variétés de $\text{Gr}(2, n)$.

Dans le cas précédent, c'est-à-dire pour la configuration en chenille, on avait l'inclusion de groupes

119

C'est cette chaîne, ou plus précisément la chaîne correspondante au niveau des algèbres de Lie, que Guillemin et Sternberg ont utilisée pour obtenir les intégrales sur système de Gelfand–Cetlin sur $\mathfrak{u}(n)^*$, en y appliquant la méthode de Thimm [GS83b, GS83a].

Pour un choix de diagonales quelconque, les algèbres de Lie $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$ induites par les groupes mentionnés ci-dessus ne forment plus une suite croissante pour l'inclusion. Mais sous la condition que ces diagonales restent deux à deux disjointes, alors pour tout $1 \leq i < j \leq n$, l'algèbre de Lie

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]$$

est soit réduite à zéro, soit contenue dans \mathfrak{g}_i ou \mathfrak{g}_j . Sous cette condition, on peut encore appliquer la méthode de Thimm pour obtenir un système hamiltonien intégrable avec lequel identifier le système de Nohara et Ueda sur la variété $\mathrm{Gr}(2, n)$ [Lan15].

4.3. Structure de variété sur les fibres

Dans cette partie, on suppose fixé un choix de diagonales disjointes. L'objectif est de montrer que les fibres de l'application moment

$$\Psi = (\psi_{I_1}, \dots, \psi_{I_{n-3}}, \psi_{(1)}, \dots, \psi_{(n-1)}) : \mathrm{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$$

sont des sous-variétés de $\mathrm{Gr}(2, n)$. On utilise des méthodes analogues à celles employées dans le chapitre 2 pour l'étude des fibres de l'application moment d'un système de pliage de polygones donné. Notamment :

- on travaillera d'abord avec les fibres de l'application moment relevée $\tilde{\Psi} : V_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$, dont on prendra ensuite le quotient par l'action de $U(2)$ sur $V_2(\mathbb{C}^n)$,
- pour certains cas singuliers, on se ramènera par difféomorphisme à des fibres « moins » singulières de systèmes de dimension inférieure.

Précisons un peu ce dernier point. On dira qu'un repère $(z, w) \in V_2(\mathbb{C}^n)$ est *propre* s'il vérifie la condition

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \tilde{\psi}_{(i)}(z, w) \neq 0. \quad (4.3.1)$$

Comme cette condition ne dépend pas que de la valeur $\tilde{\Psi}(z, w) \in \mathbb{R}^{2n-4}$, on pourra parler plus généralement de *fibre propre*. Notons bien que dans la condition (4.3.1) on demande notamment que $\tilde{\psi}_{(n)}(z, w)$ soit non-nul, ce qui est équivalent à la

condition

$$\tilde{\psi}_{(1)}(\underline{z}, \underline{w}) + \cdots + \tilde{\psi}_{(n-1)}(\underline{z}, \underline{w}) \neq 1,$$

qui s'exprime bien seulement en fonction des composantes de l'application $\tilde{\Psi}$. Finalement, rappelons que pour tout $1 \leq i \leq n$, la valeur $\tilde{\psi}_{(i)}(\underline{z}, \underline{w})$ correspond à la moitié de la longueur de i -ième côté du polygone $\tilde{\Phi}(\underline{z}, \underline{w}) \in \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$ défini précédemment. Ainsi, un repère $(\underline{z}, \underline{w}) \in V_2(\mathbb{C}^n)$ est propre si et seulement si le polygone $\tilde{\Phi}(\underline{z}, \underline{w})$ correspondant est propre, c'est-à-dire que tous ses côtés sont non-nuls.

On démontrera alors le résultat en deux parties. D'abord on se restreindra aux fibres propres pour lesquels on a le fibré principal de $V_2(\mathbb{C}^n)$ sur l'espace de polygones $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$, donné par la proposition 4.2.1, et qui d'après la proposition 4.2.5 fait correspondre exactement les fibres propres de $\tilde{\psi}$ avec des fibres (relevées) de systèmes de pliage de polygones. Ensuite, pour des fibres impropres, on se ramènera au cas précédent par projection sur des fibres propres de systèmes de dimension inférieure.

Cas d'une fibre propre

Soit $(\underline{c}, \underline{\rho}) \in \mathbb{R}^{n-3} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n-4}$ tel que la fibre $\tilde{N} = \tilde{\Psi}^{-1}(\underline{c}, \underline{\rho})$ soit propre, c'est-à-dire tel que les composantes du vecteur

$$\underline{r} = (2\rho_1, \dots, 2\rho_{n-1}, 2(1 - \rho_1 - \cdots - \rho_{n-1})) \in \mathbb{R}^n$$

soient toutes strictement positives. Alors l'espace de polygones $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ est un sous-espace de l'ensemble $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$ des polygones propres de périmètre 2.

D'après la proposition 4.2.5, l'image $\tilde{\Phi}(\tilde{N})$ de \tilde{N} par l'application

$$\tilde{\Phi} : V_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}$$

est exactement une fibre relevée \tilde{M} d'un système de pliage de polygones sur $\mathcal{M}_{\underline{r}} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$. De plus, d'après la proposition 4.2.1, la restriction

$$\tilde{\Phi}^{\text{propre}} : \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}) \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$$

est un T_n -fibré principal, où T_n est le groupe des matrices unitaires diagonales de taille n , difféomorphe à $U(1)^n$. Or, d'après la proposition 2.2.2, la fibre relevée $\tilde{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$ est une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}}_{\underline{r}}$, et donc une sous-variété de $\tilde{\mathcal{M}}_{(2)}^{\text{propre}}$. Par suite, la fibre

$$\tilde{\Psi}^{-1}(\underline{c}, \underline{\rho}) = \tilde{N} = (\tilde{\Phi}^{\text{propre}})^{-1}(\tilde{M})$$

est une sous-variété de $V_2(\mathbb{C}^n)$ de dimension $\dim \tilde{N} = \dim \tilde{M} + n$.

Enfin rappelons que par définition l'application $\tilde{\Psi}$ est $U(2)$ -invariante, comme

application relevée de Ψ par la projection $V_2(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}(2, n) = V_2(\mathbb{C}^n)/U(2)$. Ainsi, la fibre \tilde{N} est également invariante par l'action propre et libre de $U(2)$ sur $V_2(\mathbb{C}^n)$, et donc son image est une variété bien définie de $\text{Gr}(2, n)$. Autrement dit, on a le résultat suivant :

Proposition 4.3.2. *Toute fibre propre de l'application moment $\Psi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$ est une sous-variété de $\text{Gr}(2, n)$.*

Cas d'une fibre quelconque

Soit maintenant $(\underline{c}, \underline{\rho}) \in \mathbb{R}^{n-3} \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{2n-4}$ tel qu'au moins une des composantes de $\underline{\rho}$ est nulle. Autrement dit, l'ensemble

$$I = \{1 \leq i \leq n \mid \rho_i \neq 0\}$$

est de cardinal $k < n$. Notons $\tilde{N} = \tilde{\Psi}^{-1}(\underline{c}, \underline{\rho})$ la fibre relevée du système de Nohara et Ueda sur $\text{Gr}(2, n)$. Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{i \in I, 1 \leq j \leq 2}$ de taille $k \times 2$, notons $\hat{A} = (\hat{a}_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 2}$ la matrice définie par :

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq 2, \quad \hat{a}_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, on complète A en une matrice \hat{A} de taille $n \times 2$ en rajoutant une ligne de zéros pour chaque indice $1 \leq i \leq n$ qui n'est pas dans I . On vérifie immédiatement que si A appartient à $V_2(\mathbb{C}^k)$, c'est-à-dire si ses deux colonnes sont deux vecteurs unitaires orthogonaux, alors la matrice complétée \hat{A} appartient à $V_2(\mathbb{C}^n)$. On obtient ainsi une application $p : V^2(\mathbb{C}^k) \rightarrow V^2(\mathbb{C}^n)$ lisse entre deux variétés de repères.

Lemme 4.3.3. *La pré-image $\tilde{N}_{\text{red}} = p^{-1}(\tilde{N})$ de \tilde{N} par $p : V^2(\mathbb{C}^k) \rightarrow V^2(\mathbb{C}^n)$ est une fibre relevée propre d'un système de Nohara et Ueda sur $\text{Gr}(2, k)$. De plus, la restriction*

$$\bar{p} : \tilde{N}_{\text{red}} \rightarrow V_2(\mathbb{C}^n)$$

est un plongement d'image \tilde{N} .

Démonstration. Notons d_1, \dots, d_{n-3} les diagonales définissant le système hamiltonien considéré sur $\text{Gr}(2, n)$ et I_1, \dots, I_{n-3} les intervalles d'entiers associés. Soit P un polygone convexe propre à n -côtés, triangulé par les diagonales d_1, \dots, d_{n-3} . Pour tout $i \notin I$, contractons le i -ième côté de P . On obtient un polygone P_{red} à k côtés, triangulé par des diagonales d'_1, \dots, d'_{k-3} , définissant un système hamiltonien intégrable d'application moment Ψ_{red} sur $\text{Gr}(2, k)$. Maintenant si on applique le même procédé à un polygone $P = \tilde{\Phi}(z, w)$ qui est l'image d'un élément $(z, w) \in \tilde{N}$

(et donc n'est plus propre), alors le polygone P_{red} coïncide avec le polygone P , puisque les côtés que l'on devrait contracter sont exactement ceux qui étaient déjà de longueur nulle dans le polygone impropre P . Ainsi dans $P_{\text{red}} = P$, chaque diagonale d'_1, \dots, d'_{k-3} coïncide avec l'une des diagonales d_1, \dots, d_{n-3} , et réciproquement chaque diagonale d_1, \dots, d_{n-3} est soit l'une des diagonales d'_1, \dots, d'_{k-3} , soit un côté de P_{red} . Or la proposition 4.2.5 affirme que les composantes de $\Psi(\underline{z}, \underline{w})$ (res. de $\Psi_{\text{red}}(\underline{z}, \underline{w})$) s'expriment en fonction des longueurs des côtés et des diagonales choisies dans P (res. dans P_{red}). Ainsi les composantes de Ψ_{red} s'expriment en fonction des composantes de Ψ et on vérifie que $p(\underline{z}, \underline{w}) \in V_2(\mathbb{C}^n)$ appartient à $\tilde{N}_{\text{red}} = \tilde{\Psi}_{\text{red}}^{-1}(\underline{c}, \underline{\rho})$ si et seulement si $(\underline{z}, \underline{w})$ appartient à une fibre \tilde{N}_{red} déterminée de manière unique par les valeurs $\underline{c}, \underline{\rho}$. Or, par définition de l'ensemble I , pour tout $(\underline{z}, \underline{w}) \in \tilde{N}_{\text{red}} = p^{-1}(\tilde{N})$, aucun des côtés de $P_{\text{red}} = \Phi(\underline{z}, \underline{w})$ n'est de longueur nulle, et donc \tilde{N}_{red} est une fibre propre.

Or, d'après la partie précédente, \tilde{N}_{red} étant propre, c'est une sous-variété plongée compacte de $V_2(\mathbb{C}^k)$. L'application \bar{p} est clairement injective, et pour tout $A \in \tilde{N}_{\text{red}}$ la différentielle $d\bar{p}_A : H \mapsto \hat{H}$ l'est aussi. Ainsi \bar{p} est une immersion injective, et donc par compacité un plongement. \square

En utilisant, comme précédemment, que la fibre \tilde{N} est invariante par l'action de $U(2)$ sur $V_2(\mathbb{C}^n)$, on obtient finalement le théorème suivant.

Théorème 4.3.4. *Soit $\Psi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$ l'application moment d'un système hamiltonien intégrable de Nohara et Ueda sur la variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$. Alors les fibres de l'application Ψ sont des sous-variétés plongées de $\text{Gr}(2, n)$.*

Remarque 4.3.5. Il existe des fibres singulières de $\Psi : \text{Gr}(2, n) \rightarrow \mathbb{R}^{2n-4}$ de dimension maximale (c'est-à-dire $2n - 4$).

En effet, supposons que L soit une fibre lagrangienne d'un système de pliage de polygones sur une espace de module \mathcal{M}_r de polygones à n côtés. En particulier, L est de dimension $n - 3 = \dim \mathcal{M}_r / 2$, et son relèvement $\tilde{L} \subset \tilde{\mathcal{M}}_r$ est de dimension $n = \dim L + \dim \text{SO}(3)$. Mais alors sa pré-image $(\Phi^{\text{propre}})^{-1}(\tilde{L})$ est une fibre relevée \tilde{N} d'un système de Nohara et Ueda sur $\text{Gr}(2, n)$, de dimension $\dim \tilde{L} + \dim \mathbb{T}^n = 2n$. La projection de $\tilde{N} \subset V_2(\mathbb{C}^n)$ sur la variété grassmannienne $\text{Gr}(2, n)$ est alors une fibre N de dimension $\dim \tilde{N} - \dim U(2) = 2n - 4$.

4.4. Perspectives

Dans cette première partie, l'étude de trois classes différentes de systèmes hamiltoniens intégrables a conduit à la même conclusion sur les fibres de l'application moment : ces dernières sont des sous-variétés plongées, même lorsqu'elles correspondent à des valeurs singulières du système. Comme on l'a vu dans cette section, ces trois familles de systèmes entretiennent des liens entre elles, ainsi il n'est

pas totalement surprenant de les voir présenter cette similarité de comportement. Un prochain objectif serait de déterminer une classe plus large de systèmes hamiltoniens intégrables dont les applications moment possèdent une structure de variété sur chacune de leurs fibres, y compris les singulières, et de dégager une démonstration unifiée de cette propriété englobant les travaux déjà effectués dans cette thèse. Un contexte envisageable pour cet étude est celui récent des dégénération toriques de systèmes hamiltoniens intégrables, développé par Haradah et Kaveh [HK12, Kav16]. L'idée est d'obtenir la variété ambiante X_0 d'un système hamiltonien intégrable fixé comme une *dégénération torique* au sens de la géométrie algébrique, c'est-à-dire intuitivement comme une limite de variétés toriques $(X_t)_t$, de sorte que pour cette « limite » le système intégrable hamiltonien naturel sur chaque variété torique (induit par l'action du tore dense qu'elle contient) converge vers le système hamiltonien intégrable sur X . Une telle construction fournit notamment une application Φ sur la variété algébrique $\mathcal{X} = \sqcup_t X_t$, lisse sur la partie régulière de \mathcal{X} , qui est le recollement des applications moment Φ_t sur chaque variété X_t . C'est précisément les fibres de cette application Φ qu'il convient d'étudier, et pour cela on pourra espérer utiliser des résultats de la théorie déjà bien développée des variétés toriques symplectiques. Le choix de cette théorie n'est pas anodin, et repose sur le fait que les systèmes hamiltoniens intégrables apparaissant dans cette thèse ont déjà été étudiés du point de vue des dégénération toriques [FFL16, FH05, HMM11, NNU10, NU14].

Parallèlement à ça, l'étude des systèmes hamiltoniens intégrables effectuée dans cette thèse peut être complétée en donnant des formes normales locales et semi-locales autour des fibres singulières, et notamment des fibres singulières lagrangiennes. En effet, on s'est ici concentré à chaque fois sur la structure géométrique de la fibre elle-même, mais il serait tout aussi intéressant de décrire ensuite son voisinage. Dans [Ala09], une telle étude est précisément réalisée pour la fibre sphérique L du système de Gelfand–Cetlin sur une orbite coadjointe générique de $\mathfrak{u}(3)^*$ (celle-là même étudiée dans la section 3.4.2), diffeomorphe à la sphère S^3 . La technique employée est de plonger la sphère S^3 dans son fibré cotangent T^*S^3 , puis de construire sur T^*S^3 un système hamiltonien intégrable tel que S^3 soit une fibre de l'application moment. Utilisant que S^3 est une sous-variété lagrangienne de son cotangent T^*S^3 , et des théorèmes de rigidité symplectique similaires à 1.1.6, on obtient que si on a un symplectomorphisme de $S^3 \subset T^*S^3$ dans L compatible avec les systèmes hamiltoniens intégrables considérés, alors ce symplectomorphisme s'étend à un voisinage de ses ensembles de départ et d'arrivée, donnant ainsi un modèle local pour le système autour de L . On peut tenter d'appliquer la même stratégie pour diverses fibres lagrangiennes des systèmes étudiés dans cette thèse.

Deuxième partie

**Topologie des systèmes intégrables
non-Hamiltoniens**

5. Actions totalement hyperboliques de \mathbb{R}^n sur des n -variétés

Dans ce chapitre, on poursuit l'étude initiée par Zung et Minh [ZM14] sur les systèmes non-hamiltoniens intégrables de type $(n, 0)$ dont les singularités sont non-dégénérées et le degré torique est nul. De manière équivalente, cela revient à étudier une action dite *totalement hyperbolique* de \mathbb{R}^n sur une variété compacte M de dimension n (voir section 1.2.2). On commence par développer une notion d'indice par rapport à un vecteur de $w \in \mathbb{R}^n$ pour les points fixes de ces actions, qu'on met en relation avec la théorie de Morse usuelle : pour w fixé et sous de légères conditions, on construit une fonction de Morse f dont les points singuliers sont exactement les points fixes de l'action et telle qu'en chacun de ces points l'indice par rapport à w et l'indice de Morse usuel par rapport à f coïncident. On étudie ensuite le nombre de domaine hyperboliques, c'est-à-dire d'orbites de dimension maximale, avec une étude plus particulière pour les surfaces fermées. En effet, en dimension 2, les orbites de l'action dessinent un graphe plongée sur la variété M , qu'on étudie d'ailleurs plus en détail dans le cas où M est la sphère de dimension 2. Enfin, on termine en exhibant deux exemples nouveaux d'actions totalement hyperboliques en dimension 3, l'un sur la sphère S^3 et l'autre dans l'espace projectif \mathbb{RP}^3 . Le contenu de ce chapitre est disponible de manière indépendante dans [Bou16].

5.1. Points fixes de l'action et théorie de Morse

Dans cette section, on fixe M une variété compacte et connexe de dimension n munie d'une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$, c'est à dire une action fidèle de \mathbb{R}^n sur M dont les singularités sont non-dégénérées. Soient H_1, \dots, H_N les hypersurfaces transverses de M données par le lemme 1.2.19, c'est-à-dire telles que les composantes connexes de

$$M \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_N)$$

soient les domaines hyperboliques de l'actions (les orbites de dimensions maximale n). Notons v_1, \dots, v_N les vecteurs de \mathbb{R}^n associés à ces orbites, engendrant un éventail complet.

5.1.1. Flot engendré par un vecteur générique

On dira qu'un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ est *générique* si w et $-w$ appartiennent chacun à l'intérieur d'un cône de dimension n de l'éventail complet engendré par (v_1, \dots, v_N) , c'est-à-dire si chacun n'appartient à aucun sous-espace de la forme

$$\text{Vect}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq N, \quad k < N.$$

Définition 5.1.1. On appelle *flot engendré par le vecteur générique* $w \in \mathbb{R}^n$ le flot

$$\varphi_w^t = \rho(-tw, \cdot)$$

de l'action ρ dans la direction $-w$, autrement dit le flot du champ de vecteurs $X_{-w} = -X_w$ générateur de l'action dans la direction $-w$.

Soit \mathcal{O} un domaine hyperbolique de l'action. Notons

$$I = \{1 \leq i \leq n \mid H_i \cap \bar{\mathcal{O}} \neq \emptyset\}.$$

Rappelons que la famille $\{v_i \mid i \in I\}$ engendre l'éventail complet

$$\mathbb{R}^n = \bigsqcup_{\mathcal{H} \subset \bar{\mathcal{O}}} C_{\mathcal{H}}$$

où l'union est prise sur les orbites \mathcal{H} de ρ contenues dans $\bar{\mathcal{O}}$ et

$$C_{\mathcal{H}} = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall p \in \mathcal{O}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_w^t(p) \in \mathcal{H}\}.$$

Par définition, si $w \in \mathbb{R}^n$ est générique, alors il appartient à cône $C_{\mathcal{H}}$ de dimension n . Or d'après la proposition 1.2.17, on a

$$\dim \mathcal{H} = n - \dim C_{\mathcal{H}} = 0,$$

c'est-à-dire que l'orbite \mathcal{H} est réduite à un point fixe $p_+ \in \partial\mathcal{O}$, vers lequel converge $\phi_w^t(p)$ pour tout $p \in \mathcal{O}$ lorsque t tend vers $+\infty$. En appliquant le même raisonnement à $-w$, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{O}$, le flot $\phi_w^t(p)$ converge vers un point fixe $p_- \in \mathcal{O}$ lorsque t tend vers $-\infty$. Finalement, pour la dynamique du flot φ_w^t sur \mathcal{O} , le point fixe p_+ est attractif, le point fixe p_- est répulsif, et tout autre point fixe sur $\partial\mathcal{O}$ est un point-selle, comme illustré sur la figure 5.1. Ce flot ϕ_w^t a les propriétés suivantes :

- il possède un nombre fini de points fixes sur M ,
- il n'a pas d'autre orbite fermée que ses points fixes,
- pour tout point $p \in M$, $\phi_w^t(p)$ converge vers un point fixe lorsque t tend vers

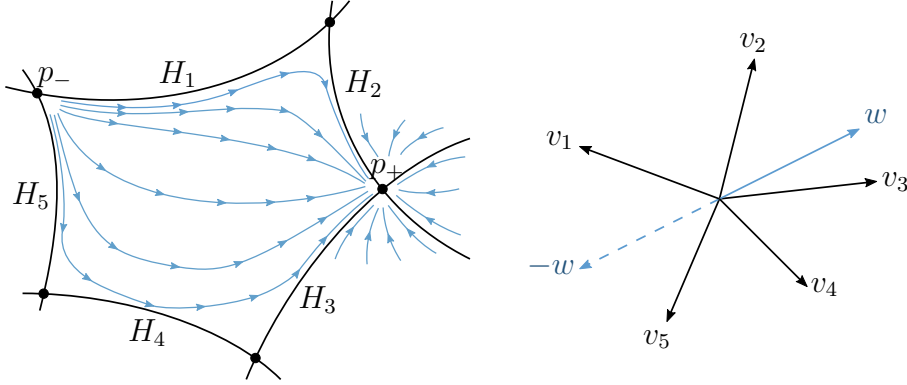


FIGURE 5.1. : Dynamique du flot engendré par un vecteur générique sur un domaine hyperbolique en dimension 2.

$+\infty$.

Toutefois, il ne satisfait pas la condition de stabilité locale pour être un flot de Morse–Smale [S⁺60]. On dira que ϕ_w^t est un flot *quasi-Morse–Smale*.

5.1.2. Notion d'indice pour les points fixes

Définissons une notion d'indice pour les points fixes de l'action ρ , au moyen des flots quasi-Morse–Smale définis précédemment.

Définition 5.1.2. Soit p un point fixe de l'action ρ , et $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur générique. Notons (x_1, \dots, x_n) des coordonnées canoniques pour l'action au voisinage de p associées à une base adaptée (v_1, \dots, v_n) . Notons $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de w dans la base adaptée.

On appelle *indice de p relativement à w* le nombre

$$\text{Ind}_p(w) = \text{card}\{1 \leq i \leq n \mid \alpha_i > 0\}.$$

Rappelons que par définition de la base adaptée, le générateur X_{v_i} de l'action dans la direction v_i s'écrit en coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) :

$$X_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Ainsi, toujours dans les coordonnées canoniques (x_1, \dots, x_n) centrées en p , le

générateur de l'action dans la direction $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ s'exprime

$$X_w = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

On en déduit l'expression locale du flot ϕ_w^t :

$$\phi_w^t(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \exp(-\alpha_1 t), \dots, x_n \exp(-\alpha_n t)).$$

Ainsi, $\text{Ind}_p(w)$ représente le nombre de directions attractives du flot ϕ_w^t au voisinage du point fixe p . En particulier, l'indice de p relativement à w vaut n si p est un point fixe attractif de ϕ_w^t , et 0 si c'est un point fixe répulsif.

On aimerait maintenant faire le lien entre cette notion d'indice, et celle de la théorie de Morse. Plus particulièrement, afin d'obtenir des résultats sur le nombre de points fixes de ρ d'indice donné (relativement à un vecteur w générique fixé), on aimerait construire une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les points singuliers sont exactement les points fixes de ρ , avec pour chaque point fixe $p \in M$ égalité entre l'indice de Morse $\text{Ind}_p(f)$ et l'indice $\text{Ind}_p(w)$ relativement à w . En particulier, la fonction f doit être croissante dans la direction du flot Φ_w^t , donnant ainsi une condition nécessaire (et en fait suffisante) à l'existence d'une telle fonction.

Définition 5.1.3. Soit $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur générique. Pour tous points fixes $p_1, p_2 \in M$ de ρ , notons $p_1 \rightarrow p_2$ si $p_1 \neq p_2$ et s'il existe un point $p \in M$ tel que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_w^t(p) = p_1, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_w^t(p) = p_2. \end{cases}$$

On dira que le flot ϕ_w^t est *acyclique* s'il n'existe pas de suite finie p_1, \dots, p_k de points fixes de ϕ_w^t telle que

$$p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_k \rightarrow p_1.$$

Lemme 5.1.4. Si M est de dimension 2, alors pour tout $w \in \mathbb{R}^2$ générique le flot ϕ_w^t est acyclique.

Démonstration. Soit $w \in \mathbb{R}^2$ un vecteur générique. Supposons par l'absurde qu'on a une suite finie de points fixes p_1, \dots, p_{k+1} telle que

$$p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \cdots \rightarrow p_k \rightarrow p_{k+1} = p_1.$$

Notons $L_1, \dots, L_k \in \{H_1, \dots, H_N\}$ les hypersurfaces (donc ici de dimension 1) telles que pour tout $1 \leq i \leq k$, p_i est l'intersection de L_i et L_{i+1} (avec $L_{k+1} = L_1$), et v_1, \dots, v_k les vecteurs associés dans l'éventail de \mathbb{R}^n déterminé par la dynamique

de l'action ρ . Notons qu'on peut avoir $v_i = v_j$ avec $i \neq j$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, L_{i+1} contient l'orbite $\mathcal{O}_{i+1}^{(1)}$ de dimension 1 « reliant » p_i à p_{i+1} , c'est-à-dire vérifiant pour tout $p \in \mathcal{O}_{i+1}^{(1)}$,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_w^t(p) = p_i \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_w^t(p) = p_{i+1}.$$

Ainsi, pour le flot ϕ_w^t , chaque p_i est simultanément point fixe attractif sur $\bar{\mathcal{O}}_i^{(1)}$ et point fixe répulsif sur $\bar{\mathcal{O}}_{i+1}^{(1)}$. Vu la forme normale de l'action au voisinage de p_i , c'est donc que

$$w = -b_i v_i + a_i v_{i+1}$$

avec $a_i, b_i > 0$. Autrement dit, si on note $v_i = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$ et $w = (w^{(1)}, w^{(k)})$ dans la base canonique de \mathbb{R}^2 , on a pour $k = 1, 2$ la relation :

$$AX^{(k)} = w^{(k)} B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 & & & \\ & -b_2 & a_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & & & & -b_n \end{pmatrix}, \quad X^{(k)} = \begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ \vdots \\ v_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons la méthode de Cramer à ce système pour isoler v_1 . Notons C_1, \dots, C_n les colonnes de A , de sorte que le système se réécrit

$$v_1^{(k)} C_1 + \dots + v_n^{(k)} C_n = w^{(k)} B.$$

Cela implique notamment que

$$w^{(k)} \det(B, C_2, \dots, C_n) = v_1^{(k)} \det(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Or,

$$\delta = \det(B, C_2, \dots, C_n) = (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^n a_1 \dots a_{i-1} b_{i+1} \dots b_n \neq 0.$$

Ainsi, on a $w = \delta^{-1} \det(A) v_1$, ce qui contredit la généralité de w . \square

On peut alors énoncer le théorème principal de cette section, dont la démonstration sera l'objet de toute la prochaine sous-section.

Théorème 5.1.5. *Soit $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^n sur une variété M connexe et compacte de dimension n . Soit $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur générique pour l'action.*

Si le flot φ_w^t est acyclique, alors il existe une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ dont les points singuliers sont exactement les points fixes de ρ , et telle que pour tout point fixe $p \in M$, on ait

$$\text{Ind}_p(f) = \text{Ind}_p(w),$$

où $\text{Ind}_p(f)$ est l'indice de p pour la fonction f au sens de la théorie de Morse usuelle.

En appliquant les inégalités de Morse [Mil63] à la fonction f , on obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 5.1.6. *Soit $w \in \mathbb{R}^n$ un vecteur générique tel que le flot ϕ_w^t soit acyclique. Pour tout $0 \leq i \leq n$, notons :*

- c_i le nombre de points fixes de ρ d'indice i relativement à w ,
- $b_i(M)$ le i -ième nombre de Betti de la variété M .

Alors pour tout $1 \leq i \leq n$, on a l'inégalité

$$c_i - c_{i-1} + \cdots + (-1)^i c_0 \geq b_i(M) - b_{i-1}(M) + \cdots + (-1)^i b_0(M).$$

En particulier pour $i = n$, l'inégalité ci-dessus est une égalité, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i c_i = \chi(M).$$

On en déduit notamment les inégalités de Morse faibles suivantes :

$$\forall 0 \leq i \leq n, \quad c_i \geq b_i(M).$$

Par suite, le nombre de points fixes de l'action ρ est supérieur ou égal à la somme des nombres de Betti de M .

5.1.3. Preuve du théorème principal

L'objectif de cette section est de démontrer le théorème 5.1.5. Pour cela, on va construire explicitement la fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Fixons $w \in \mathbb{R}^n$ générique tel que le flot ϕ_w^t est acyclique. Notons p_1, \dots, p_V les points fixes de l'action ρ , et fixons $c_1, \dots, c_V \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall 1 \leq i, j \leq V, \quad p_i \rightarrow p_j \implies c_i < c_j$$

(c'est possible précisément car ϕ_w^t est acyclique). Posons $d_i^- = c_i - \epsilon$ et $d_i^+ = c_i + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ suffisamment petit de sorte que les intervalles $[d_i^-, d_i^+]$ soient deux à deux disjoints.

Étape 1 : construction locale autour de chaque point fixe

Soit U_i un voisinage de p_i avec coordonnées canoniques (x_1, \dots, x_n) centrées en p , et $B = (v_1, \dots, v_n)$ la base adaptée correspondante. Notons $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de w dans la base B . Ainsi,

$$X_w = \alpha_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \alpha_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Définissons $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ par l'expression locale

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = c_i - \alpha_1 \frac{x_1^2}{2} - \dots - \alpha_n \frac{x_n^2}{2}.$$

Alors f_i est une fonction de Morse sur U_i avec un seul point singulier, le point p_i , d'indice $\text{Ind}_p(w) = \text{Ind}_p(f)$. De plus, on a :

$$-X_w \cdot f_i = \alpha_1^2 x_1^2 + \dots + \alpha_n^2 x_n^2 \geq 0.$$

Étape 2 : prolongement le long des orbites de dimension 1

Supposons $p_i \rightarrow p_j$. On a alors $c_i < d_i^+ < d_j^- < c_j$. Soit $\mathcal{O}_{i,j}^{(1)}$ l'orbite de dimension 1 reliant p_i à p_j . Prenons une rectification du champ de vecteurs $-X_w$ le long de cette orbite : soient $q_i \in U_i \cap \mathcal{O}_{i,j}^{(1)}$, $q_j = \phi_w^T(q_i) \in U_j \cap \mathcal{O}_{i,j}^{(1)}$, $V_{i,j}$ un sous-ensemble de M , Ω un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^{n-1} and $\varphi_{i,j} : V_{i,j} \rightarrow \Omega \times [0, 1]$ tels que :

- $\varphi_{i,j}^{-1}(\Omega \times \{0\}) \subset \{p \in U_i \mid f_i(p) = d_i^+\},$
- $\varphi_{i,j}^{-1}(\Omega \times \{1\}) \subset \{p \in U_j \mid f_j(p) = d_j^-\},$
- $\varphi_{i,j}^{-1}(\{0\} \times [0, 1]) = \{\varphi_w^t(q_i) \mid 0 \leq t \leq 1\},$
- $(\varphi_{i,j})_*(-X_w) = \frac{\partial}{\partial t}$ où (s_1, \dots, s_{n-1}, t) sont les coordonnées sur $\Omega \times [0, 1]$

(voir figure 5.2). Définissons alors $f_{i,j} : U_{i,j} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_{i,j} \circ \varphi_{i,j}^{-1}(s, t) = d_i^+ + t(d_j^- - d_i^+).$$

Alors $f_{i,j}$ n'a pas de point singulier, et vérifie $-X_w \cdot f_{i,j} \geq \varepsilon_{i,j} > 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer $U_i \cap U_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ et $U_{i,j} \cap U_{k,\ell} = \emptyset$ pour tout $\{i, j\} \neq \{k, \ell\}$. Posons

$$W_i = \{p \in U_i \mid d_i^- < f_i(p) < d_i^+\}$$

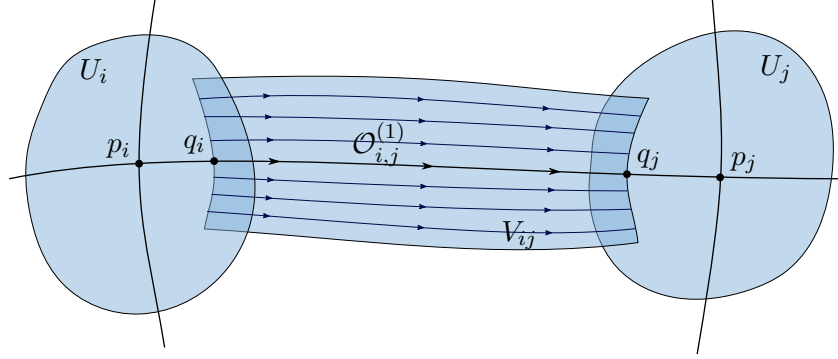


FIGURE 5.2. : Connexion des fonctions f_i et f_j le long de l'orbite $\mathcal{O}_{i,j}^{(1)}$.

et définissons $W_{i,j}$ comme l'intérieur de $V_{i,j}$ (voir figure 5.3). Les applications f_i et $f_{i,j}$ définissent une fonction lisse sur $W = (\cup_i W_i) \cup (\cup_{i,j} W_{i,j})$ et continue sur \bar{W} .

Étape 3 : prolongement à toute la variété

Soit W' une composante connexe de $M \setminus \bar{W}$. Étendons f par continuité sur $W \cup \bar{W}'$ à l'aide du flot ϕ_w^t . Pour $p \in \partial W'$, notons

$$T(p) = \inf\{t > 0 \mid \phi_w^t(p) \notin W'\}.$$

Le flot ϕ_w^t n'ayant pas d'orbite périodique ni de point fixe dans \bar{W}' , pour tout $q \in W'$ il existe un unique $p \in \partial W'$ tel que $q = \phi_w^t(p)$ avec $0 < t < T(p)$. Posons

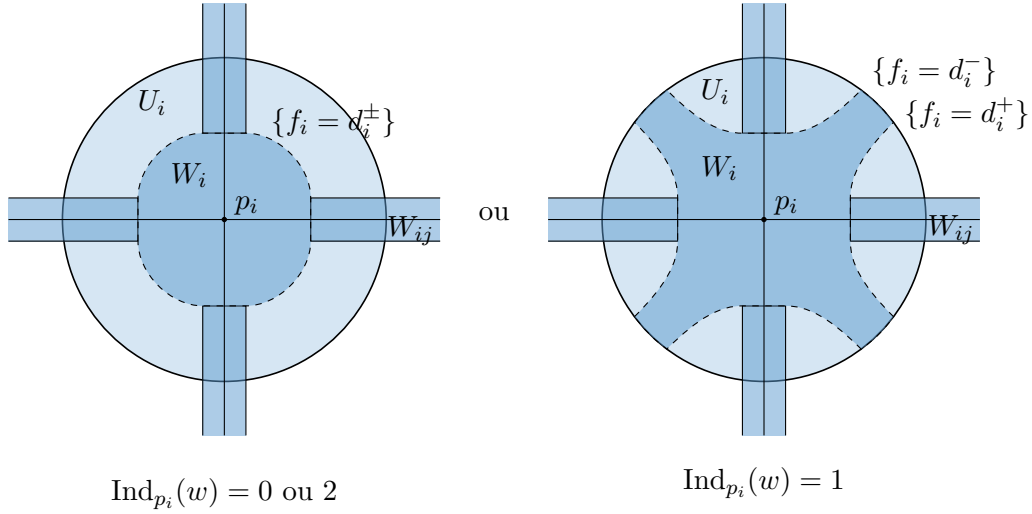
$$f(q) = \frac{T(p) - t}{T(p)} f(p) + \frac{t}{T(p)} f(\phi_w^{T(p)}(p)),$$

f étant déjà définie en p et $\phi_w^{T(p)}(p)$ appartenant à \bar{W} . On obtient alors une fonction définie et continue sur $\bar{W} \cup \bar{W}'$, et lisse sur W et sur W' .

De plus, par construction de W , p appartient au voisinage \bar{U}_i d'un point fixe p_i , $\phi_w^{T(p)}$ appartient au voisinage \bar{U}_j d'un point fixe p_j , et il existe une suite finie $p_i \rightarrow \dots \rightarrow p_j$ de points fixes, garantissant $d_i^\pm < d_j^\pm$. On a finalement :

$$(-X_w \cdot f)(q) = \frac{f(\phi_w^{T(p)}) - f(p)}{T(p)} > 0.$$

En répétant cette construction pour chaque composante connexe de $M \setminus \bar{W}$, on obtient finalement une fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :


 FIGURE 5.3. : Restriction de U_i à W_i en dimension 2.

- f est continue sur M ,
- f est lisse sur une famille $(W_\lambda)_\lambda$ d'ouverts de M telle que $\cup_\lambda \bar{W}_\lambda = M$,
- pour chaque W_λ , la restriction de f à W_λ peut être prolongée en une fonction lisse sur un ouvert contenant \bar{W}_λ ,
- $-X_w \cdot f \geq 0$ en tout point lisse de f ,
- plus précisément, $-X_w \cdot f \geq \epsilon > 0$ en tout point lisse de f en dehors de voisinages des points fixes de ρ arbitrairement petits (c'est-à-dire que pour tout choix de voisinages des points fixes on peut trouver un tel ϵ).

Étape 4 : lissage de la fonction

La dernière étape de cette démonstration est d'appliquer un opérateur de lissage à la fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ continue et « Morse par morceaux » que l'on vient de construire, et de montrer qu'on obtient alors une fonction de Morse avec exactement les mêmes points singuliers et les mêmes indices.

On va utiliser l'opérateur de lissage introduit par de Rham dans [dR84]. Rappelons ici sa définition. On commence par fixer une fonction $r : [0, 1[\rightarrow [0, +\infty[$ lisse et strictement croissante, vérifiant

$$\begin{cases} r(t) = t & \text{pour tout } t \leq 1/3, \\ r(t) \geq t & \text{pour tout } t > 1/3. \end{cases}$$

Cette fonction détermine un difféomorphisme radial $h : B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la boule unité de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , défini par

$$\forall x \neq 0, \quad h(x) = \frac{r(\|x\|)}{\|x\|}x$$

(en particulier sa restriction à la boule $B_{1/3}$ de rayon $1/3$ est l'identité). Définissons alors pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme $\sigma_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par :

$$\sigma_v(x) = \begin{cases} h^{-1}(h(x) + v) & \text{si } \|x\| < 1, \\ x & \text{si } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Enfin, fixons une fonction $\chi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lisse, de support contenu dans la boule unité fermée \bar{B}_1 , et telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi(v) dv = 1.$$

Supposons que Ω soit un ouvert de \mathbb{R}^n contenant \bar{B}_1 (ainsi en particulier, Ω vérifie $\sigma_v(\Omega) = \Omega$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$). Pour tout $t > 1$, on définit un opérateur de lissage R_t agissant sur les fonctions continues sur Ω de la manière suivante : étant donnée une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$\forall x \in \Omega, \quad (R_t g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g \circ \sigma_v(x) t^n \chi(tv) dv.$$

La fonction $R_t g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue est lisse.

Lemme 5.1.7. *Supposons $\bar{\Omega}$ compact, et soit $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons qu'il existe $s_0 > 0$ tel que g se prolonge en une fonction lipschitzienne sur $\Omega_{s_0} = \Omega + s_0 B_1$, vérifiant pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $0 \leq s < s_0$,*

$$g(x + se_1) - g(x) \geq s\varepsilon \tag{5.1.8}$$

(où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ est le premier vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n).

Alors pour tout $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe $t_0 > 1$ tel que pour tout $t \geq t_0$, la fonction lissée $R_t g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\forall x \in \Omega, \quad \frac{\partial R_t g}{\partial x_1}(x) \geq \varepsilon'.$$

Démonstration. Soit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $0 \leq s < s_0$,

$$(R_t g)(x + se_1) - (R_t g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ \sigma_v(x + se_1) - g \circ \sigma_v(x)) t^n \chi(tv) dv. \tag{5.1.9}$$

Rappelons que χ est nulle en dehors de \bar{B}_1 , ainsi l'intégrale ci-dessus peut en fait être calculée sur $B_{1/t} \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $F : \bar{\Omega} \times [0, s_0] \times \bar{B}_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application lisse définie par

$$F(x, s, v) = \sigma_v(x + se_1) - se_1.$$

Notons $k > 0$ la constante de Lipschitz de g . Par compacité, il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $x \in \Omega$, $s \in [0, s_0]$ et $v \in \bar{B}_1$, si $\|v\| \leq \eta$ alors

$$\left\| \frac{\partial F}{\partial s}(x, s, v) \right\| = \left\| \frac{\partial F}{\partial s}(x, s, v) - \frac{\partial F}{\partial s}(x, s, 0) \right\| \leq \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{k},$$

et par suite en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $s \mapsto F(x, s, v)$,

$$\|\sigma_v(x + se_1) - se_1 - \sigma_v(x)\| \leq \frac{s(\varepsilon - \varepsilon')}{k},$$

d'où en utilisant que g est k -lipschitzienne

$$s(\varepsilon' - \varepsilon) \leq g \circ \sigma_v(x + se_1) - g(\sigma_v(x) + se_1) \leq s(\varepsilon - \varepsilon'). \quad (5.1.10)$$

Or par hypothèse, on a pour tout $v \in \mathbb{R}^n$

$$s\varepsilon \leq g(\sigma_v(x) + se_1) - g \circ \sigma_v(x). \quad (5.1.11)$$

Ainsi, en sommant les inégalités (5.1.10) et (5.1.11) et en injectant cette majoration dans l'expression (5.1.9), on obtient que pour tous $t \geq t_0 = 1/\eta$, $x \in \Omega$ et $0 \leq s < s_0$,

$$(R_t g)(x + se_1) - (R_t g)(x) \geq s\varepsilon' \int_{\mathbb{R}^n} t^n \chi(tv) dv = s\varepsilon'.$$

En divisant les deux membres par s et en prenant la limite lorsque t tend vers 0, on obtient l'inégalité annoncée. \square

Lemme 5.1.12. *Soit Ω_{s_0} un ouvert convexe et borné de \mathbb{R}^n et $g : \Omega_{s_0} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. S'il existe des familles finies $(\Omega_i)_{i \in I}$ et $(\Omega'_i)_{i \in I}$ d'ouvert de \mathbb{R}^n et $(\tilde{g}_i : \Omega'_i \rightarrow \mathbb{R})_{i \in I}$ telles que :*

$$(5.1.12.a) \quad \cup_{i \in I} \bar{\Omega}_i \text{ recouvre } \Omega_{s_0},$$

$$(5.1.12.b) \quad \text{pour tout } i \in I, \bar{\Omega}_i \subset \Omega'_i,$$

$$(5.1.12.c) \quad \text{pour tout } i \in I, g \text{ et } \tilde{g}_i \text{ coïncident sur } \bar{\Omega}_i,$$

alors g est lipschitzienne sur Ω_{s_0} .

Démonstration. Soit $i \in I$. Sans perte de généralité, on peut supposer Ω'_i borné. Fixons un ouvert U_i de \mathbb{R}^n tel que $\bar{\Omega}_i \subset U_i \subset \bar{U}_i \subset \Omega'_i$. Alors

$$k = \max_{i \in I} (\sup \{ \|d\tilde{g}_i(x)\| \mid x \in \bar{U}_i \})$$

est un nombre fini. Montrons que c'est la constante de Lipschitz de g .

Soient $x_0, x_1 \in \Omega_{s_0}$. Ce dernier ouvert étant par hypothèse convexe, pour tout $t \in [0, 1]$, le point $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$ appartient à Ω_{s_0} . Notons

$$T = \sup \{ t \in [0, 1] \mid \|g(x_t) - g(x_0)\| \leq k\|x_t - x_0\| \},$$

et supposons par l'absurde que T est strictement inférieur à 1. D'après (5.1.12.a), pour tout $n > 1/(1-T)$, il existe un indice $i_n \in I$ tel que $x_{T+1/n} \in \bar{\Omega}_{i_n}$. Comme I est fini, il existe notamment un indice $i \in I$ et une sous-suite $(\epsilon_n)_{n \geq n_0}$ de la suite $(1/n)_{n \geq n_0}$ tels que pour tout $n \geq n_0$, le point $x_{T+\epsilon_n}$ appartient à $\bar{\Omega}_i$. Par suite, à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, x_T appartient aussi à $\bar{\Omega}_i \subset U_i$. Soit $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x_T, r)$ de centre x_T et de rayon r soit contenue dans U_i . Alors pour tout $0 < \delta < r/\|x_1 - x_0\|$, le point $x_{T+\delta}$ appartient à U_i , et d'après l'inégalité des valeurs intermédiaires on a

$$\|\tilde{g}_i(x_{T+\delta}) - \tilde{g}_i(x_T)\| \leq k\|x_{T+\delta} - x_T\|.$$

En particulier, en prenant $\delta = \epsilon_n$, et en utilisant que x_T et $x_{T+\epsilon_n}$ appartiennent à $\bar{\Omega}_i$ où, d'après (5.1.12.c), les fonctions g et \tilde{g}_i coïncident, on a pour tout n assez grand

$$\|g(x_{T+\epsilon_n}) - g(x_T)\| \leq k\|x_{T+\epsilon_n} - x_T\|.$$

Or, par définition de T et par continuité de g , on a $\|g(x_T) - g(x_0)\| \leq k\|x_T - x_0\|$. Par suite,

$$\|g(x_{T+\epsilon_n}) - g(x_0)\| \geq k(\|x_{T+\epsilon_n} - x_T\| + \|x_T - x_0\|) = k\|x_{T+\epsilon_n} - x_0\|,$$

ce qui contredit le fait que T est supremum. C'est donc que $T = 1$, autrement dit $\|g(x_1) - g(x_0)\| \leq k\|x_1 - x_0\|$. \square

Étendons la définition de l'opérateur de lissage à toute la variété M . Supposons que (V, φ) soit une carte locale de M telle que \bar{B}_1 soit inclus dans $\varphi(V)$ (quitte à composer φ avec une transformation linéaire de \mathbb{R}^n , on peut toujours supposer que cette dernière condition est vérifiée). On définit alors un opérateur de lissage

$S_{t,V}$ agissant sur les fonctions continues $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall p \in M, \quad (S_{t,V}f)(p) = \begin{cases} R_t(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) & \text{si } p \in V, \\ f(p) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.1.13)$$

La fonction $S_{t,V} : M \rightarrow \mathbb{R}$ obtenue est lisse sur V .

Proposition 5.1.14. *Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur une variété compacte M de dimension n . Supposons qu'il existe une famille finie $(W_i)_{i \in I}$ d'ouverts de M , une famille finie $(K_i)_{i \in I}$ de compacts (éventuellement vides) $K_i \subset W_i$, un champ de vecteur lisse X de flot ϕ^t sur M et un réel $\epsilon > 0$ tels que :*

(5.1.14.a) *la restriction de f à chaque W_i est une fonction de Morse (éventuellement sans singularité),*

(5.1.14.b) *l'ensemble $\mathcal{S} = \cup_{i \in I} W_i$ sur lequel f est lisse vérifie $\bar{\mathcal{S}} = M$,*

(5.1.14.c) *pour tout $i \in I$, il existe un ouvert W'_i de M contenant \bar{W}_i et une fonction lisse $\tilde{f}_i : W'_i \rightarrow \mathbb{R}$ tels que f et \tilde{f}_i coïncident sur \bar{W}_i ,*

(5.1.14.d) *pour tout $p \in \mathcal{S}$, $\phi^t(p) \in \mathcal{S}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ sauf un nombre fini d'entre eux,*

(5.1.14.e) *pour tout $p \in \mathcal{S} \setminus (\cup_i K_i)$, $(X \cdot f)(p) \geq \epsilon$ (en particulier les singularités de f et X appartiennent à $\cup_i K_i$).*

Alors il existe un opérateur de lissage S_t sur M tout que pour tout $t > 0$ assez grand, $S_t f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse dont les singularités sont exactement les singularités de f sur \mathcal{S} , avec chacune le même indice.

Démonstration. Notons Δ l'ensemble des fonctions $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que :

- F est lisse sur chaque W_i ,
- pour tout $i \in I$, il existe un ouvert W'_i de M contenant \bar{W}_i et une fonction $\tilde{F}_i : W'_i \rightarrow \mathbb{R}$ telle que F et \tilde{F}_i coïncident sur \bar{W}_i ,
- il existe $\epsilon' > 0$ tel que $(X \cdot F)(q) \geq \epsilon'$ pour tout $q \in \mathcal{S} \setminus (\cup_i K_i)$.

Soit $p \in M \setminus \mathcal{S}$. En particulier, $p \notin \cup_i K_i$ et donc $X(p) \neq 0$. Ainsi, il existe une carte locale (U_p, φ_p) centrée en p vérifiant

$$(\varphi_p)_* X = \alpha_p \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{avec } \alpha_p > 0.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $\bar{U}_p \cap K_i = \emptyset$ pour tout $i \in I$. De plus, quitte à multiplier φ_p par une constante positive assez grande, on peut supposer que $\varphi_p(U_p)$ contient la boule unité fermée \bar{B}_1 . Soient $V_p \subset U_p$ un ouvert et $s_p > 0$ tels que $\Omega_p = \varphi_p(V_p)$ soit convexe, borné, et contienne \bar{B}_1 , et tels que $\Omega_{p,s_p} = \varphi_p(V_p) + s_p B_1$ soit contenu dans $\varphi_p(U_p)$.

Soit $F \in \Delta$. Alors la fonction $g = F \circ \varphi_p^{-1}$ est continue sur Ω_{p,s_p} . De plus, g est lisse sur

$$\Omega_i = \varphi_p(V_p \cap W_i)$$

et s'étend en une fonction lisse $\tilde{g}_i = \tilde{F}_i \circ \varphi_p^{-1}$ sur

$$\Omega'_i = \varphi_p(V_p \cap W'_i).$$

Ainsi, d'après le lemme 5.1.12, g est une fonction lipschitzienne sur Ω_{p,s_p} . Montrons maintenant que g vérifie de plus la condition (5.1.8). Soit $q \in V_p \cap \mathcal{S}$ un point où F est lisse, et soit $0 < s < s_0$. D'après la condition (5.1.14.d), il existe une suite finie

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k = s$$

telle que pour tout $s' \in]s_j, s_{j+1}[$, $\phi^{s'}(q)$ appartient à \mathcal{S} . Comme $\bar{U}_p \cap (\cup_i K_i) = \emptyset$, pour un tel s' on a $(X \cdot F)(\phi^{s'}(q)) \geq \epsilon'$. Ainsi, pour tout $s_j < a < b < s_{j+1}$ on a

$$F(\phi^b(q)) - F(\phi^a(q)) \geq (b - a)\epsilon',$$

et par continuité l'inégalité reste valable pour $a = s_j$ et $b = s_{j+1}$. Sommant ces inégalités pour j allant de 0 à $k - 1$ on obtient finalement

$$F(\phi^s(q)) - F(q) \geq s\epsilon'.$$

Par continuité, on étend ce résultat à tout $q \in \overline{V_p \cap \mathcal{S}} = V_p$. Autrement dit, la fonction $g = F \circ \varphi_p^{-1}$ vérifie pour tous $x \in \Omega_p$ et $0 < s < s_0$:

$$g(x + se_1) - g(x) \geq s\epsilon' / \alpha_p.$$

On est donc maintenant en mesure d'appliquer le lemme 5.1.7 : fixons $0 < \epsilon'' < \epsilon'$, alors il existe $t_p > 1$ tel que pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $x \in \Omega_p$,

$$\frac{\partial R_t g}{\partial x_1} \geq \epsilon'' / \alpha_p.$$

De manière équivalente, en notant $S_{t,p}$ l'opérateur de régularisation défini sur V_p par la formule (5.1.13), on a pour tout $t \geq t_0$ et pour tout $q \in V_p$,

$$(X \cdot S_{t,p} F)(q) \geq \epsilon''.$$

Rappelons que, par définition, $(S_{t,p}F)(q) = F(q)$ pour tout $q \in M \setminus V_p$ (et donc en particulier pour tout $q \in \cup_i K_i$), ainsi la fonction $S_{t,p}F : M \rightarrow \mathbb{R}$ appartient encore à l'ensemble Δ , et est maintenant lisse sur $\mathcal{S} \cup V_p$.

Il suffit alors d'itérer le procédé jusqu'à obtenir une fonction lisse sur toute la variété M . C'est possible en un nombre fini d'étapes, puisque par compacité de M , il existe un nombre fini de points $p_1, \dots, p_k \in M$ tels que les ouverts V_{p_1}, \dots, V_{p_k} recouvrent $M \setminus \mathcal{S}$. On définit alors l'opérateur de lissage global

$$S_t = S_{t,p_k} \circ S_{t,p_{k-1}} \circ \dots \circ S_{t,p_1}.$$

Pour tout $t \geq \max\{t_{p_j} \mid 1 \leq j \leq k\}$, comme f appartient à l'ensemble Δ , la fonction $S_t f$ appartient aussi à Δ . En particulier, il existe $\epsilon' > 0$ tel que

$$(X \cdot S_t f)(q) \geq \epsilon'$$

pour tout $q \in \mathcal{S} \setminus (\cup_i K_i)$. Par continuité, l'inégalité reste vraie pour tout $q \in M \setminus (\cup_i K_i)$, ainsi en particulier la fonction $S_t f$ n'a pas de point singulier en dehors de $\cup_i K_i$. Or, sur $\cup_i K_i$ les fonctions f et $S_t f$ coïncident, donc finalement $S_t f$ est une fonction de Morse avec mêmes singularités que f , chacune de même indice. \square

En particulier, si on applique la proposition 5.1.14 ci-dessus à la fonction continue $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on a construite dans cette section, avec X le champ de vecteurs $-X_w$ et W_i les différents ouverts sur lesquels on a défini f de manière lisse dans les étapes précédentes (notés W_i , $W_{i,j}$ et W'), alors on obtient une fonction de Morse $S_t f : M \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la conclusion du théorème 5.1.5, qui est donc démontré. \square

5.2. Nombre de domaines hyperboliques

Dans cette section, on étudie le nombre de domaines hyperboliques d'une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ fixée sur une variété M compacte et connexe de dimension n .

5.2.1. Flot générique et nombre de domaines hyperboliques

Commençons par le théorème suivant, qui est une conséquence immédiate de l'étude des flots quasi-Morse-Smale effectuée dans la section précédente.

Théorème 5.2.1. *Le nombre de domaines hyperboliques d'une action totalement hyperbolique sur une variété compacte et connexe de dimension n est égal à*

$$k2^n,$$

où k est le nombre de points fixes attractifs (ou le nombre de points fixes répulsifs) du flot quasi-Morse–Smale ϕ_w^t engendré par un vecteur générique $w \in \mathbb{R}^n$. En particulier, ce nombre k ne dépend pas du choix de w .

Démonstration. Autour d'un point fixe p de l'action totalement hyperbolique ρ , il y a exactement 2^n domaines hyperboliques $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{2^n}$. D'après la forme normale de l'action au voisinage de p (donnée par le théorème 1.2.12), si p est attractif (res. répulsif) pour le flot ϕ_w^t sur un certain $\bar{\mathcal{O}}_i$, alors il l'est sur tout un voisinage de p , donc notamment p est attractif (res. répulsif) sur tous les $\bar{\mathcal{O}}_1, \dots, \bar{\mathcal{O}}_{2^n}$. De plus, chaque domaine hyperbolique admet un et un seul point fixe attractif (res. répulsif) sur son adhérence, donc finalement le nombre total de domaines hyperbolique est égal à $k2^n$ où k est le nombre total de points fixes attractifs (res. répulsifs) de ϕ_w^t sur toute la variété M . \square

Remarque 5.2.2. Avec les notations du corollaire 5.1.6, le théorème 5.2.1 ci-dessus affirme que le nombre de domaines hyperboliques de l'action est égal à $c_0 2^n = c_n 2^n$, et donc en particulier que $c_0 = c_n$.

Lorsque w varie dans \mathbb{R}^n , un point fixe p donné de l'action passe successivement par tous les états (attractif, répulsif, point selle) pour le flot ϕ_w^t . Ainsi, il existe sur M plusieurs décompositions en « puzzle » dont les pièces sont les réunions de 2^n domaines hyperboliques autour d'un point fixe attractif. La figure 5.4 donne deux exemples de telles décompositions pour une même action totalement hyperbolique ρ de \mathbb{R}^2 sur S^2 . Dans la partie supérieure droite de la figure est donné l'éventail complet de \mathbb{R}^2 de cette action, engendré par cinq vecteurs v_1, \dots, v_5 . À gauche est représentée la décomposition de S^2 en domaines hyperboliques délimités par cinq hypersurfaces H_1, \dots, H_5 , après une projection stéréographique depuis le point d'intersection de H_3 et H_4 . Enfin, en bas à gauche sont données les décompositions en puzzle de S^2 pour deux vecteurs génériques w_A et w_B dans S^2 . Les points mis en valeur sont les points attractifs des flots quasi-Morse–Smale correspondants.

Remarque 5.2.3. Lorsque M est la sphère S^2 de dimension 2, on peut affiner le théorème 5.2.1. En effet, celui-ci affirme que le nombre de domaine hyperbolique est égal à $4c_n$, où c_n est le nombre de points attractifs d'un flot quasi-Morse–Smale ϕ_w^t . Mais rappelons qu'un point fixe p à l'intersection de deux hypersurfaces H_i et H_j (qui sont donc des courbes dans ce cas) est attractif si et seulement si w appartient au cône $C_{i,j}$ engendré par les vecteurs v_i et v_j . Ainsi, le nombre de points attractif peut s'exprimer sous la forme

$$c_n = \sum_{(i,j) \in I} \text{card}(H_i \cap H_j), \quad \text{avec } I = \{1 \leq i < j \leq n \mid w \in C_{i,j}\}.$$

Or, sur la sphère S^2 , deux courbes fermées H_i et H_j transverses se coupent nécessairement un nombre pair de fois, ainsi la somme ci-dessus est paire. Par suite, le

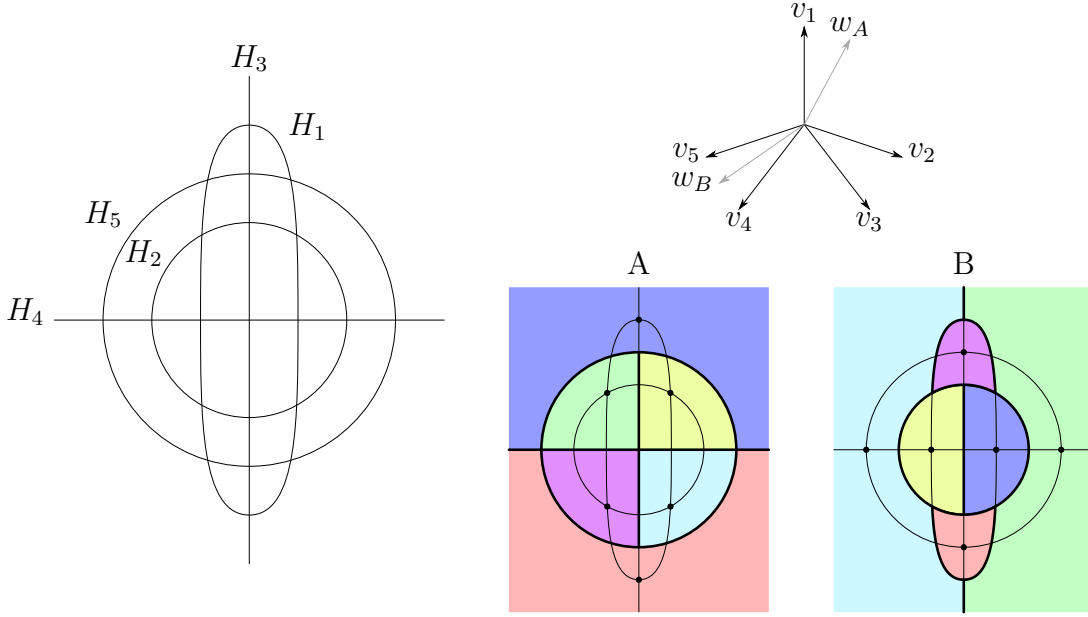


FIGURE 5.4. : Décompositions en puzzle de la sphère S^2 pour différents vecteurs génériques d'une même action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2 .

nombre de domaines hyperboliques $4c_n$ est en fait divisible par 8.

5.2.2. Modification du nombre de domaines hyperboliques

Intéressons-nous maintenant à la construction d'actions totalement hyperboliques avec un nombre quelconque de domaines hyperboliques (pourvu que ce nombre respecte la conclusion du théorème 5.2.1). On va pour cela recourir à la construction suivante.

Lemme 5.2.4. *Soit $p \in M$ un point fixe de l'action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$. Sans perte de généralité, on peut supposer que p est à l'intersection des n premières hypersurfaces H_1, \dots, H_N , délimitant 2^n domaines hyperboliques U_1, \dots, U_{2^n} autour de p . Alors :*

(5.2.4.a) *la décomposition de M obtenue en ajoutant deux sphères S, S' de dimension $n - 1$ centrées en p suffisamment petites à la famille $\{H_1, \dots, H_N\}$ peut encore être réalisée comme la décomposition en domaines hyperboliques d'une action $\rho' : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$,*

(5.2.4.b) *réciroquement, si $S, S' \in \{H_1, \dots, H_N\}$ sont deux sphères autour de p intersectant seulement les n premières hypersurfaces H_1, \dots, H_n comme sur la*

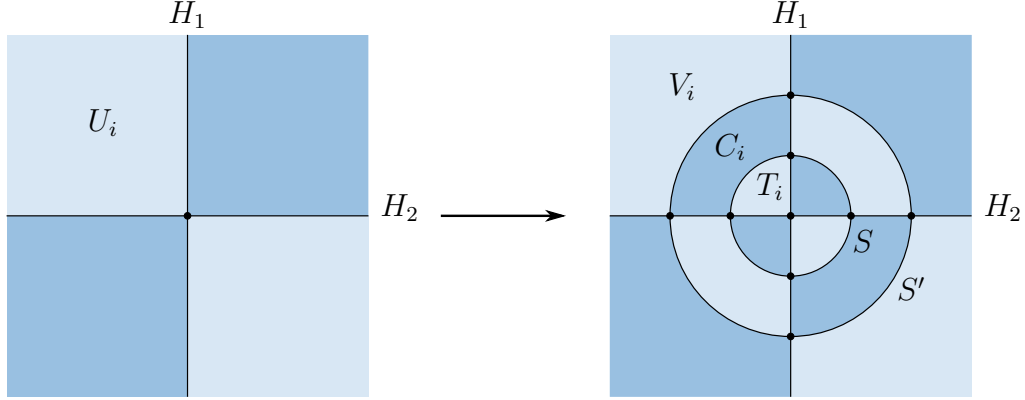


FIGURE 5.5. : Ajout de deux sphères concentriques autour d'un point fixe.

figure 5.5, alors la famille $\{H_1, \dots, H_N\} \setminus \{S, S'\}$ définit encore une décomposition de M en les domaines hyperboliques d'une action $\rho' : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$.

Démonstration. (5.2.4.a) En ajoutant deux sphères concentriques S, S' autour de p , on découpe chaque domaine U_i en trois domaines T_i, C_i et V_i avec respectivement $n+1, n+2$ et f_i+1 faces, où f_i est le nombre de faces de U_i (voir figure 5.5). Les autres domaines hyperboliques ne sont pas modifiés. Soient v_1, \dots, v_N les vecteurs de \mathbb{R}^n associés respectivement aux hypersurfaces H_1, \dots, H_N , et F l'éventail complet de \mathbb{R}^n engendré par ces vecteurs. On cherche à construire deux vecteurs $w, w' \in \mathbb{R}^n$ tels que l'éventail complet F' engendré par (v_1, \dots, v_N, w, w') soit compatible avec les domaines (H_1, \dots, H_N, S, S') . Autrement dit, on veut que pour chaque composante connexe \mathcal{O} de $M \setminus (H_1 \cup \dots \cup H_N \cup S \cup S')$, la restriction de l'éventail F' aux vecteurs associés à des hypersurfaces bordant \mathcal{O} soit encore un éventail complet de \mathbb{R}^n (donc en particulier formé de cônes strictement convexes), dont l'agencement des vecteurs est identique (d'un point de vue combinatoire) à l'agencement des hypersurfaces correspondantes autour de \mathcal{O} . En effet, cette condition est suffisante à l'existence d'une action totalement hyperbolique ρ' associée.

Il suffit de vérifier la compatibilité de F' avec les domaines T_i, C_i et V_i étant donné que les autres domaines ne sont pas modifiés. En prenant w dans le cône engendré par v_1, \dots, v_n , on s'assure que l'éventail F' est compatible avec le domaine V_i . Ensuite, en prenant $w' = -w$ (ou un vecteur suffisamment proche si $-w$ est déjà l'un des vecteurs v_1, \dots, v_N), l'éventail F' est alors compatible avec les domaines T_i et C_i .

(5.2.4.b) On reprend les mêmes notations que précédemment. Montrons d'abord que le domaine U_i , obtenu par recollement de T_i, C_i et V_i après avoir retiré les

sphères S et S' , a au moins trois coins, c'est-à-dire n'est pas bordé seulement par les hypersurfaces H_1, \dots, H_n . En effet, si par l'absurde c'était le cas, alors le domaine V_i serait bordé seulement par H_1, \dots, H_n et S' . Par compatibilité de F' avec le domaine C_i , on obtiendrait que soit w soit w' n'est pas dans le cône convexe engendré par v_1, \dots, v_n . Mais alors F' ne serait pas compatible soit avec V_i , soit avec T_i , ce qui contredirait l'hypothèse de départ.

Il suffit de montrer maintenant que l'éventail complet obtenu en retirant les vecteur w et w' à F' est encore un éventail complet, et est compatible avec la nouvelle décomposition de M . La compatibilité de F' avec V_i assure que F est compatible avec U_i , tandis que la compatibilité de F' avec T_i et C_i assure que les cônes de l'éventail F sont encore strictement convexes. \square

Ce lemme garantit notamment l'existence d'actions totalement hyperboliques avec un nombre de domaines hyperboliques arbitrairement grand, ou encore l'existence de domaines hyperboliques avec un nombre de faces arbitrairement grand. Plus précisément :

Proposition 5.2.5. *Soit M une variété compacte et connexe de dimension n . Supposons qu'il existe une action totalement hyperbolique $\rho : \mathbb{R}^n \times M \rightarrow M$ sur M . Alors :*

(5.2.5.a) *si D est le nombre de domaines hyperboliques de ρ , alors pour tout $k \geq 0$, il existe sur M une action totalement hyperbolique avec $D + k2^{n+1}$ domaines hyperboliques,*

(5.2.5.b) *si f est le nombre de faces d'un domaine hyperbolique donné de ρ , alors pour tout $f' \geq f$, il existe sur M une action totalement hyperbolique dont l'un des domaines hyperboliques possède f' faces.*

Démonstration. Il suffit d'itérer la construction (5.2.4.a). En effet, chacun des 2^n domaines hyperboliques U_i autour du point fixe p considéré se retrouve séparé en trois domaines T_i , C_i et V_i tandis que les autres sont inchangés. Par suite, le nombre total de domaines hyperboliques augmente de $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. De plus, si le domaine U_i avait f faces, alors le domaine V_i possède $f + 1$ faces. \square

5.2.3. Cas des surfaces fermées

Appliquons les résultats établis jusqu'ici au cas de la dimension 2, c'est-à-dire lorsque M est une surface fermée Σ . On obtiendra non seulement des informations sur le nombre de domaines hyperboliques, mais aussi sur le nombre de points fixes et le nombre d'orbites de dimension 1. En effet, dans ce cas, les hypersurfaces transverses H_1, \dots, H_N dessinent sur Σ un graphe plongé Γ , dont les sommets,

arêtes et faces correspondent respectivement aux points fixes, orbites de dimension 1, et domaines hyperboliques de l'action ρ .

Ce graphe Γ étant planaire, il vérifie la célèbre formule d'Euler

$$V - E + F = \chi(\Sigma), \quad (5.2.6)$$

où V , E et F désignent respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces du graphe plongé Γ , tandis que $\chi(\Sigma)$ est la caractéristique d'Euler de la surface M . Mais de plus, les propriétés de la décomposition en domaines hyperboliques sur M garantissent que de chaque sommet sont issus quatre arêtes (puisque un point fixe est l'intersection transverse de deux hypersurfaces H_i et H_j), nécessairement deux à deux distinctes (car un domaine hyperbolique est un « polygone courbé » d'au moins trois côtés). Enfin, deux sommets de Γ sont reliés par au plus une arête. On dit que Γ est un *graphe simple régulier de degré 4*. On en déduit notamment la propriété suivante :

Proposition 5.2.7. *Soit Γ le graphe dessiné par l'action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2 sur une surface fermée Σ . Alors on a les relations suivantes :*

$$\begin{cases} E = 2V, \\ F = V + \chi(\Sigma), \end{cases}$$

où V , E et F sont respectivement le nombre de sommets, arêtes et faces de Γ .

Démonstration. La première égalité est un résultat classique sur les graphes réguliers, dont on rappelle ici la preuve. Comme chaque sommet est de degré 4 (c'est-à-dire que 4 arêtes en sont issues), la somme

$$S = \sum_{v \text{ sommet de } \Gamma} (\text{nombre d'arêtes issues de } v)$$

est égale à $4V$. Or, chaque arête contribue à cette somme exactement deux fois, une pour chacun des deux sommets qu'elle relie. Par suite la somme S est égale à $2E$. On en déduit la relation $E = 2V$, qui une fois injectée dans la formule d'Euler (5.2.6) donne la deuxième relation. \square

Montrons maintenant que sur une surface fermée Σ , n'importe quel nombre de domaines hyperboliques est réalisable pourvu qu'il soit compatible avec les conclusions du théorème 5.2.1 et de la remarque 5.2.3.

Proposition 5.2.8. *Soit $k \geq 1$. Alors :*

(5.2.8.a) *la sphère S^2 admet une action totalement hyperbolique possédant $8k$ domaines hyperboliques,*

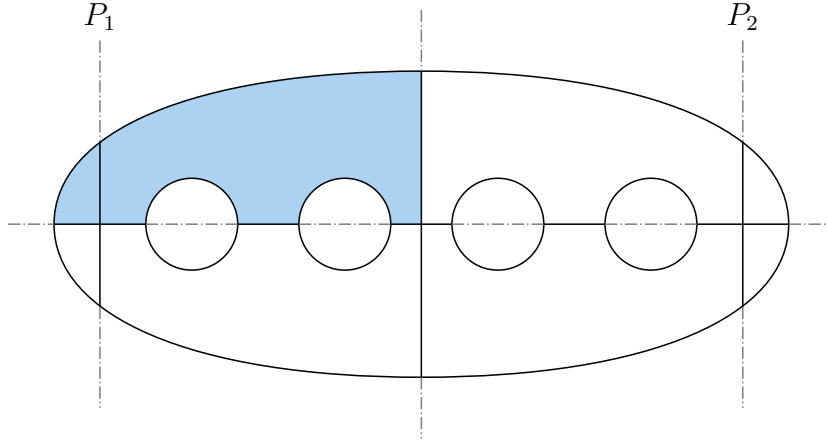


FIGURE 5.6. : Décomposition d'une surface non-orientable en 8 domaines hyperboliques.

(5.2.8.b) toute surface fermée orientable de genre $g \geq 1$ admet une action totalement hyperbolique possédant $4k$ domaines hyperboliques,

(5.2.8.c) toute surface fermée non-orientable admet une action totalement hyperbolique possédant $4k$ domaines hyperboliques.

Démonstration. L'exemple 1.2.21 recense des exemples d'actions totalement hyperboliques sur des surfaces fermées : une avec 8 domaines hyperboliques sur la sphère S^2 , une avec 4 domaines hyperboliques sur la surface fermée orientable \tilde{M}_g de genre $g \geq 1$, et une avec 4 domaines hyperboliques sur la surface fermée non-orientable M_g de genre $g \geq 0$. Notons que ce dernier exemple définit aussi une action totalement hyperbolique avec 8 domaines hyperboliques sur \tilde{M}_g (voir figure 1.1). Avec un procédé analogue, on peut également construire une action totalement hyperbolique avec 8 domaines hyperboliques sur M_g . En effet, considérons le plongement standard de la surface \tilde{M}_g dans \mathbb{R}^3 de sorte à ce qu'elle soit invariante par l'involution $\sigma : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Coupons cette surface par les trois plans canoniques $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ et $\{z = 0\}$, et par deux plans parallèles P_1 et P_2 comme sur la figure 5.6. On obtient aisément un éventail compatible avec cette décomposition. En effet, par symétrie, il suffit de construire un éventail compatible avec les deux domaines colorés. Or l'un de ces deux domaines est un triangle dont les trois côtés sont aussi trois côtés successifs de l'autre domaine. Il suffit donc d'associer aux côtés du domaine triangulaire n'importe quel triplet de vecteurs formant un éventail complet dans \mathbb{R}^n , qu'on complète ensuite sans problème en un éventail compatible avec le second domaine. Finalement, on obtient

une décomposition de \tilde{M}_g en 16 domaines hyperboliques, invariante par l'involution σ . Par suite, on a une action totalement hyperbolique possédant 8 domaines hyperboliques sur M_g .

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 5.2.5 autant de fois que nécessaire à l'un de ces exemples pour obtenir $8 + 8k$ (res. $4 + 8k$ ou $8 + 8k$) domaines hyperboliques sur S^2 (res. sur \tilde{M}_g ou sur M_g). \square

5.3. Actions totalement hyperboliques sur la sphère de dimension 2

Dans cette section, on étudie plus précisément une action totalement hyperbolique ρ fixée dans le cas où la variété M est la sphère S^2 de dimension 2. Rappelons que dans ce cas, la décomposition de M en domaines hyperboliques définit un graphe plongé sur la sphère S^2 avec V sommets, E arêtes et F faces. Notons aussi L_1, \dots, L_N les N hypersurfaces (donc ici des courbes simples fermées) donnant la décomposition en domaines hyperboliques, et v_1, \dots, v_N les vecteurs de \mathbb{R}^2 associés.

On va utiliser à plusieurs reprises un coloriage des domaines hyperboliques dont l'existence est garantie par le lemme suivant :

Lemme 5.3.1. *Il existe un coloriage des domaines hyperboliques de $\rho : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ avec deux couleurs (disons, blanc et noir) tel que deux domaines hyperboliques adjacents quelconques sont toujours de couleurs différentes.*

Démonstration. Il suffit de construire ce coloriage par récurrence. Commençons avec zéro hypersurface sur la sphère S^2 , et supposons tous les domaines hyperboliques coloriés en blanc. D'après le théorème de Jordan, le complémentaire d'une courbe fermée simple sur S^2 admet deux composantes connexes compactes. Choisissons arbitrairement l'une des deux composantes connexes de $S^2 \setminus L_1$, et colorions tous les domaines qu'elle contient en noir. Ensuite, inversons le coloriage sur l'une des deux composantes connexes de $S^2 \setminus L_2$ (c'est-à-dire que sur cette composante, on colorie en noir les domaines blancs et vice-versa). Itérons le procédé pour L_3, \dots, L_N . Par construction, deux domaines de part et d'autre d'une des hypersurfaces L_i sont de couleurs différentes. \square

Dans tout ce qui suit, on suppose fixé un tel coloriage. Étant donné un sous-ensemble $U \subset S^2$, on notera $F_N(U)$ (res. $F_B(U)$) le nombre de domaines hyperboliques noirs (res. de domaines hyperboliques blancs) inclus dans U .

Proposition 5.3.2. *On a les propriétés suivantes :*

(5.3.2.a) $F_N(S^2) = F_B(S^2)$, c'est-à-dire qu'il y a autant de domaines noirs que de domaines blancs sur S^2 ,

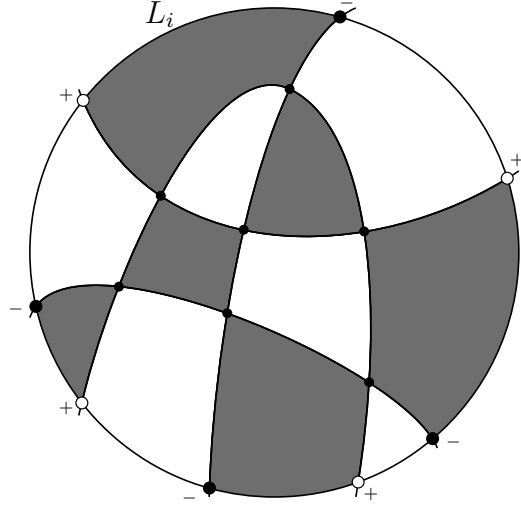


FIGURE 5.7. : Domaines hyperboliques dans une composante connexe de $S^2 \setminus L_k$.

(5.3.2.b) si U est l'une des composantes connexes du complémentaire $S^2 \setminus L_i$ d'un des lacets L_1, \dots, L_N , alors $F_N(U) = F_B(U)$.

Démonstration. Notons $\theta_{i,j}$ l'angle (non-orienté) entre les vecteurs $v_i, v_j \in \mathbb{R}^2$. Soit D un domaine hyperbolique. Notons L_{i_1}, \dots, L_{i_k} les lacets formant (dans cet ordre) la frontière de D . Ainsi, aux coins du domaine D on associe les angles $\theta_{i_1, i_2}, \theta_{i_2, i_3}, \dots, \theta_{i_k, i_1}$, dont la somme

$$\theta(D) = \theta_{i_1, i_2} + \theta_{i_2, i_3} + \dots + \theta_{i_{k-1}, i_k} + \theta_{i_k, i_1}$$

vaut 2π . Ainsi, la somme $S_N(U)$ (res. $S_B(U)$) des angles associés à tous les coins de couleur noire (res. tous les coins de couleur blanche) dans U s'écrit :

$$S_N(U) = \sum_{\substack{D \subset U \\ D \text{ noir}}} \theta(D) = 2\pi F_N(U) \quad \left(\text{res. } S_B(U) = \sum_{\substack{D \subset U \\ D \text{ blanc}}} \theta(D) = 2\pi F_B(U) \right).$$

Or, autour de chaque point fixe $p \in L_i \cap L_j$ de l'action, on a les coins de quatre domaines hyperboliques, nécessairement deux blancs et deux noirs. À ces quatre coins sont associés le même angle $\theta_{i,j}$. Finalement les sommes $S_N(S^2)$ et $S_B(S^2)$ de

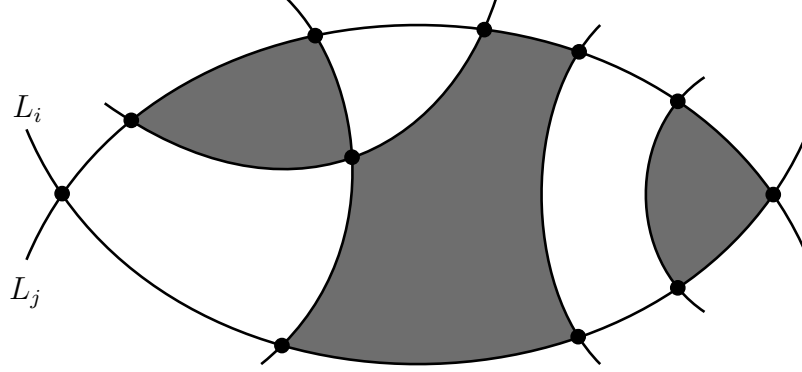


FIGURE 5.8. : Domaines hyperboliques sur un œil entre deux courbes.

tous les angles associés à des coins de couleur donnée peuvent encore s'écrire

$$S_N(S^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{p \in L_i \cap L_j} 2\theta_{i,j} \right) = S_B(S^2).$$

Par suite $F_N(S^2) = F_B(S^2)$.

Si U est une composante connexe du complémentaire d'une courbe L_k , alors plus précisément, un point intérieur $p \in U$ est entouré par quatre coins dans U , deux noirs et deux blancs, tandis qu'un point $p \in \partial U = L_k$ sur le bord est entouré par quatre coins dont seuls deux sont dans U , un blanc et un noir (voir figure 5.7). Finalement, on a

$$S_N(U) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sum_{p \in L_i \cap L_j \cap U} 2\theta_{i,j} + \sum_{p \in L_i \cap L_j \cap \partial U} \theta_{i,j} \right) = S_B(U),$$

d'où $F_N(U) = F_B(U)$. □

Lorsque deux courbes L_i et L_j sont d'intersection non-vide, on appelle *œil* entre L_i et L_j chacune des composantes connexes de $S^2 \setminus (L_i \cup L_j)$ (voir figure 5.8). Si U est un œil entre L_i et L_j , on appelle *coin* de l'œil U chacun des deux sommets sur $L_i \cap L_j \cap \partial U$, et *cil* sur U chacun des autres sommets sur ∂U .

Proposition 5.3.3. *Soit U un œil entre deux courbes L_i et L_j . Alors :*

(5.3.3.a) *les nombres $F_N(U)$ et $F_B(U)$ sont égaux,*

(5.3.3.b) *les deux domaines à chaque coin de l'œil U sont de couleurs différentes,*

(5.3.3.c) le nombre de cils sur U appartenant à L_i (res. à L_j) est impair.

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la proposition 5.8. Quand on calcule les sommes $S_N(U)$ et $S_B(U)$ des angles associés aux coins des domaines de U de couleurs noire et blanche respectivement, on constate que chaque sommet intérieur de l'œil U et chaque cil de U donnent chacun autant de coins noirs que de coins blancs. Reste à considérer les deux coins de l'œil, tous deux associés à l'angle $\theta_{i,j}$. Si par l'absurde ces deux points étaient de la même couleur, alors on aurait

$$2\theta_{i,j} = |S_N(U) - S_B(U)| = 2\pi|F_N(U) - F_B(U)| \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Par suite, les vecteurs v_i et v_j formeraient un angle plat. Ils seraient donc linéairement dépendants, bien qu'associés à deux côtés consécutifs d'un même domaine hyperbolique (celui au coin de l'œil U), ce qui est contradictoire.

Ainsi, les deux coins de l'œil U appartiennent à des domaines de couleurs différentes, et par suite $S_N(U) = S_B(U)$, c'est-à-dire $F_N(U) = F_B(U)$. De plus, en partant d'un coin de U et en suivant la courbe L_i , à chaque cil on change de domaine, et donc de couleur. Comme les deux coins sont de couleurs différentes, c'est que le nombre de cils sur L_i est pair. \square

De la même manière qu'on a obtenu des propriétés sur le nombre de domaines hyperboliques, on peut exhiber des propriétés sur le nombre de points fixes de l'action dans diverses parties de S^2 . Étant donné un sous-ensemble $U \subset S^2$, notons $V(U)$ le nombre de points fixes de ρ appartenant à U (c'est-à-dire le nombre de sommets dans U du graphe Γ dessiné sur S^2 par les orbites de ρ).

Proposition 5.3.4. *Considérons l'une des courbes fermées L_i sur S^2 . Alors :*

(5.3.4.a) le nombre $V(L_i)$ de points fixes sur L_i est un multiple de 4,

(5.3.4.b) si U est une composante connexe de $S^2 \setminus L_i$, alors le nombre $V(U)$ de points fixes dans U est impair.

Démonstration. Deux courbes fermées simples L_i et L_j transverses se coupent nécessairement un nombre pair de fois. Par suite, le nombre

$$V(L_i) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \text{card}(L_i \cap L_j)$$

est pair. On peut donc associer à chaque point fixe sur L_i le signe $+$ ou $-$ de sorte que deux points consécutifs sur L_i soient toujours de signes opposés (comme sur la figure 5.7). On a alors $V(L_i) = 2V_+(L_i)$ où $V_+(L_i)$ est le nombre de points fixes auquel on a associé le signe $+$ sur L_i . Soit $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$. D'après la proposition 5.3.3, tout œil entre L_i et L_j possède un nombre impair de cils. Par

suite, les deux coins d'un œil ont le même signe associé, et donc tous les points sur $L_i \cap L_j$ sont de même signe. Ainsi $V_+(L_i)$ est pair, et donc $V(L_i)$ est divisible par 4.

Soit U une composante connexe de $S^2 \setminus L_i$. Notons Γ_U la restriction du graphe Γ à sa partie dessinée sur \bar{U} . C'est un graphe planaire possédant $V(U) + V(L_i)$ sommets, E_U arêtes et $F(U) + 1$ faces, vérifiant la formule d'Euler (5.2.6) :

$$(V(\bar{U}) + V(L_i)) - E_U + (F(U) + 1) = 2.$$

De plus, les sommets de Γ_U sur L_i sont de degré 3, tandis que ceux dans U sont de degré 4 (voir figure 5.7). De manière analogue à celle employée dans la preuve de la proposition 5.2.7, on montre

$$4V(U) + 3V(L_i) = 2E_U.$$

Or, on vient de montrer que $V(L_i)$ est multiple de 4, donc E_U est pair. De plus d'après la proposition 5.3.2, $F(U)$ est pair. Ainsi, $V(U) = 1 - V(L_i) + E_U - F(U)$ est impair. \square

On est maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

Théorème 5.3.5. *Soit $\rho : \mathbb{R}^2 \times S^2 \rightarrow S^2$ une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2 sur la sphère S^2 , possédant V points fixes et F domaines hyperboliques. Notons N le nombre de courbes fermées L_1, \dots, L_N transverses obtenues par recollement des orbites de dimension 1 de ρ . Alors les trois propriétés équivalentes suivantes sont satisfaites :*

(5.3.5.a) N est pair,

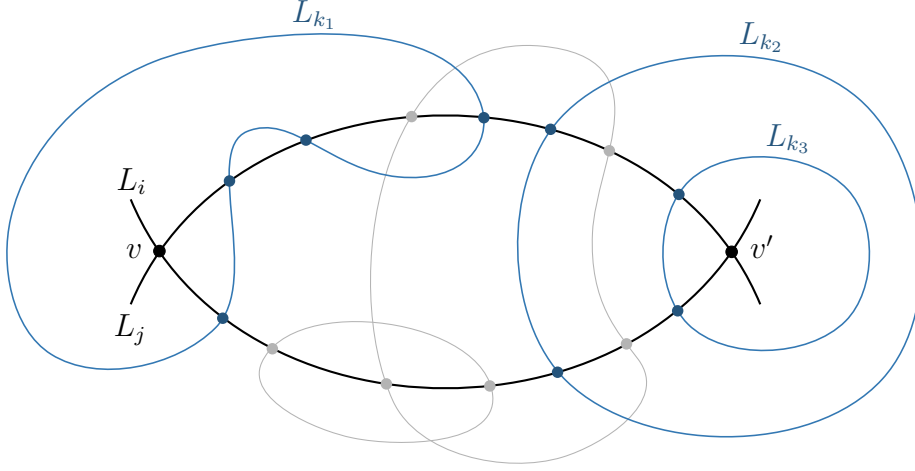
(5.3.5.b) V est congru à 2 modulo 4,

(5.3.5.c) F est un multiple de 4.

Démonstration. D'après la proposition 5.2.7, on a $F = V + 2$, d'où l'équivalence entre (5.3.5.b) et (5.3.5.c). Montrons maintenant que ces deux assertions sont équivalentes à (5.3.5.a). Pour ce faire, commençons par partitionner l'ensemble $\text{Fix}(\rho)$ des points fixes de ρ en un ensemble

$$P = \{\{v_1, v'_1\}, \dots, \{v_{V/2}, v'_{V/2}\}\}$$

formé de paires $\{v, v'\}$ telles que v et v' sont les coins d'un œil entre deux courbes L_i et L_j . Cela induit notamment une involution σ sur $\text{Fix}(\rho)$, qui à un point fixe


 FIGURE 5.9. : Paire de points séparée par trois lacets $L_{k_1}, L_{k_2}, L_{k_3}$.

v associe l'unique point fixe $\sigma(v)$ tel que la paire $\{v, \sigma(v)\}$ appartienne à P . Pour tout $1 \leq i \leq n$, fixons une composante connexe U_i de $S^2 \setminus L_i$ et notons

$$P_i = \{\{v, v'\} \in P \mid \text{card}(\{v, v'\} \cap U_i) = 1\}$$

l'ensemble des paires de P dont les deux éléments v et v' sont « séparés » par la courbe L_i . Remarquons les deux faits suivants.

- On a une injection naturelle $\iota : P_i \rightarrow \text{Fix}(\rho) \cap U_i$ qui à une paire $\{v, v'\} \in P_i$ associe son unique élément appartenant à U_i . L'ensemble $\text{Fix}(\rho) \cap U_i$ des points fixes de ρ appartenant à U_i est l'union disjointe de l'image $\iota(P_i)$ de cette inclusion, et de l'union des paires dont les deux éléments sont dans U_i . Or d'après la proposition 5.3.4, $\text{Fix}(\rho) \cap U_i$ est de cardinal $V(U_i)$ impair. C'est donc que $\iota(P_i)$ est aussi de cardinal impair. Ainsi, $\text{card } P_i$ est impair.
- Soit $p = \{v, v'\} \in P$ une paire de points fixes, qui sont les coins d'un œil V entre deux courbes L_i et L_j . Pour toute autre courbe L_k , v et v' sont dans deux composantes connexes distinctes de $S^2 \setminus L_k$ (c'est-à-dire $p \in P_k$) si et seulement si L_k crée un nombre impair de cils de V sur L_i (voir figure 5.9). Or, d'après la proposition 5.3.3, le nombre total de cils de V sur L_i est impair, c'est donc qu'on a un nombre impair de courbes L_k séparant v et v' . Autrement dit, l'ensemble

$$L(p) = \{1 \leq k \leq n \mid p \in P_k\}$$

est de cardinal impair.

Finalement, notons pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $1 \leq j \leq V/2$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la paire } \{v_j, v'_j\} \text{ appartient à } P_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a

$$S = \sum_{i=1}^N \text{card } P_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{V/2} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{V/2} \sum_{i=1}^N a_{i,j} = \sum_{j=1}^{V/2} \text{card } L(\{v_j, v'_j\}).$$

Par suite on a bien,

$$N \text{ impair} \iff S \text{ impair} \iff V/2 \text{ impair} \iff V \equiv 2 \pmod{4}.$$

Ainsi, les trois conditions sont équivalentes, et d'après le théorème 5.2.1, elles sont bien satisfaites. \square

On termine cette partie en mentionnant que la condition (5.3.5.a) dans le théorème précédent est bien optimale.

Proposition 5.3.6. *Soit N un nombre impair, $N \geq 3$. Il existe une action totalement hyperbolique de \mathbb{R}^2 sur la sphère S^2 dont les orbites de dimension 1 définissent N lacets sur S^2 .*

Démonstration. Comme pour la proposition 5.2.8, il suffit de partir d'une action totalement hyperbolique vérifiant $N = 3$ sur la sphère S^2 (comme celle donnée dans l'exemple 1.2.21) et d'appliquer autant de fois que nécessaire la construction du lemme 5.2.4 qui crée bien à chaque fois deux lacets supplémentaires. \square

5.4. Exemples d'actions totalement hyperboliques en dimension 3

Dans cette dernière section, on construit deux exemples d'actions totalement hyperboliques en dimension 3 en donnant explicitement la décomposition en domaines hyperboliques et un éventail compatible dans \mathbb{R}^3 .

5.4.1. Sur la sphère S^3

Considérons la sphère de dimension 3 comme l'ensemble

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

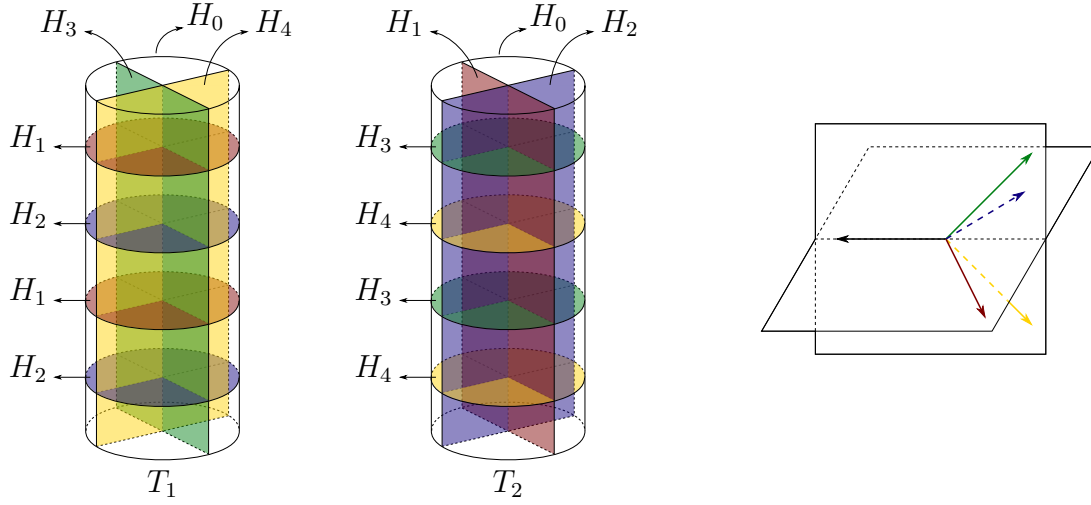


FIGURE 5.10. : Décomposition de S^3 en domaines hyperboliques et éventail compatible.

Soit $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application lisse définie par $f(z_1, z_2) = |z_2|^2 - |z_1|^2$. Le niveau $f^{-1}(0)$ de cette application est une sous-variété plongée de S^3 diffeomorphe au tore \mathbb{T}^2 , tandis que les ensembles $A_1 = \{f \geq 0\}$ et $A_{-1} = \{f \leq 0\}$ sont des sous-variétés (à bord) plongées de S^3 toutes deux diffeomorphes au tore solide $\overline{D^2} \times S^1$. Il s'agit là de la décomposition usuelle de S^3 comme union de deux tores solides recollés le long de leur bord, de sorte que chaque cercle méridien de A_1 corresponde à un cercle parallèle de A_{-1} , et réciproquement.

Pour $k = \pm 1$ et $\lambda = [a : b] \in \mathbb{RP}^1$ une pente fixés, notons H_λ^k l'hypersurface de S^3 formée des éléments $(z_1, z_2) \in S^3$ tels que $z_k = x_k + iy_k$ appartiennent à la droite (réelle) de pente $[a : b]$ dans \mathbb{C} . Autrement dit, H_λ^k est le niveau zéro de la submersion $(z_1, z_2) \mapsto bx_k - ay_k$. En identifiant naturellement A_1 et A_{-1} avec deux cylindres solides $C_1, C_2 = \overline{D^2} \times [0, 1]$ dans \mathbb{R}^3 , on vérifie (voir figure 5.10) que

- $H_\lambda^k \cap A_k$ correspond à deux disques fermés horizontaux $\overline{D^2} \times \{t_1, t_2\}$ dans C_k ,
- $H_\lambda^k \cap A_{-k}$ correspond à un plan vertical $\{by - ax\} \times [0, 1]$ dans C_{-k} .

Deux telles hypersurfaces H_λ^k et H_μ^ℓ sont en intersection transverse dès lors que $\lambda \neq \mu$ ou $k \neq \ell$. De plus, une telle surface est en intersection transverse avec le tore $T = A_1 \cap A_{-1}$, et ne s'auto-intersecte pas. On va donc pouvoir utiliser ces hypersurfaces pour découper S^3 en domaines susceptibles de provenir d'une action totalement hyperbolique.

Proposition 5.4.1. *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{RP}^1$ deux pentes distinctes. Alors il existe une action totalement hyperbolique ρ de \mathbb{R}^3 sur S^3 dont les domaines hyperboliques*

sont les composantes connexes de

$$S^3 \setminus (T \cup H_\lambda^1 \cup H_\mu^1 \cup H_\lambda^{-1} \cup H_\mu^{-1}).$$

Démonstration. Il suffit d'exhiber un éventail complet de \mathbb{R}^3 compatible avec cette décomposition. Notons que d'un point de vue combinatoire, tous les domaines dans A_1 sont équivalents, de même que tous les domaines dans A_2 . De plus, la construction est invariante par permutation des indices 1 et -1 . Considérons l'éventail suivant, représenté sur la figure 5.10 :

$$\begin{cases} v_0 = (-1, 0, 0), \\ v_\lambda^1 = (1, -1, 0), \\ v_\lambda^{-1} = (1, 0, -1), \\ v_\mu^1 = (1, 1, 0), \\ v_\mu^{-1} = (1, 0, 1). \end{cases}$$

Il est compatible avec un domaine quelconque de A_1 , et comme il est invariant (à rotation près) lorsqu'on échange v_λ^1 et v_λ^{-1} , il est compatible avec toute la décomposition de S^3 proposée. \square

5.4.2. Sur l'espace projectif \mathbb{RP}^3

La construction ci-dessus induit aussi une action totalement hyperbolique sur l'espace projectif \mathbb{RP}^3 . En effet, rappelons que ce dernier peut-être réalisé comme le quotient de la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ par l'involution $(z_1, z_2) \mapsto (-z_1, -z_2)$. Or, l'application $f : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie précédemment vérifie $f \circ \sigma = f$, ainsi les sous-variétés A_1 , A_{-1} et $T = A_1 \cap A_{-1}$ sont invariantes par l'action de σ . De même, toute hypersurface de la forme H_λ^k est invariante par σ et ainsi définit bien une hypersurface lisse de \mathbb{RP}^3 . Ainsi, on obtient le résultat suivant :

Proposition 5.4.2. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{RP}^1$ deux pentes distinctes. Alors il existe une action totalement hyperbolique ρ de \mathbb{R}^3 sur \mathbb{RP}^3 dont les domaines hyperboliques sont les composantes connexes de*

$$S^3 \setminus (\pi(T) \cup \pi(H_\lambda^1) \cup \pi(H_\mu^1) \cup \pi(H_\lambda^{-1}) \cup \pi(H_\mu^{-1})),$$

où $\pi : S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ est l'application quotient pour l'action de σ .

Dans [ZM14], Zung et Minh évoquent la question de l'existence d'actions totalement hyperboliques en dimension 3, notamment sur les espaces lenticulaires. Étant données deux entiers p et q premiers entre eux, l'espace lenticulaire $L(p; q)$

est une variété lisse pouvant être réalisée comme le quotient de la sphère S^3 par l'action libre de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie par

$$[1] \cdot (z_1, z_2) = (\xi z_1, \xi^q z_2) \quad \text{où } \xi = \exp(2i\pi/p).$$

En particulier, lorsque $(p, q) = (2, 1)$, on retrouve l'espace projectif \mathbb{RP}^3 sur lequel nous venons de construire une action totalement hyperbolique. Malheureusement, cette construction ne peut pas être étendue à d'autres espaces lenticulaires, puisque dès lors que $p \geq 2$, les hypersurfaces H_λ^k que nous avons utilisées ne sont pas invariantes par l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. De plus, toute surface $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -invariante contenant H_λ^k doit aussi contenir $[1] \cdot H_\lambda^k = H_\mu^k$ avec $\lambda \neq \mu$. Ainsi, une telle surface s'auto-intersecte et ne peut donc pas être utilisée pour découper l'espace lenticulaire $L(p; q)$ en union de domaines hyperboliques.

Bibliographie

- [Ala09] I. Alamiddine. *Géométrie de systèmes Hamiltoniens intégrables : le cas du système de Gelfand–Ceitlin*. PhD thesis, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier, 2009.
- [Arn89] V. I. Arnol’d. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1989. Traduit depuis le russe par K. Vogtmann et A. Weinstein.
- [Aud12] M. Audin. *Torus actions on symplectic manifolds*, volume 93. Birkhäuser, 2012.
- [AZ10] M. Ayoul and N. T. Zung. Galoisian obstructions to non-Hamiltonian integrability. *Comptes Rendus Mathématique*, 348(23) :1323–1326, 2010.
- [BBT03] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon. *Introduction to classical integrable systems*. Cambridge University Press, 2003.
- [BD15] O. Babelon and B. Doucot. Higher index focus–focus singularities in the Jaynes–Cummings–Gaudin model : Symplectic invariants and monodromy. *Journal of Geometry and Physics*, 87 :3–29, 2015.
- [BF04] A. V. Bolsinov and A. T. Fomenko. *Integrable Hamiltonian systems : geometry, topology, classification*. CRC Press, 2004.
- [BMRZ16] A. Bolsinov, J. J. Morales-Ruiz, and N. T. Zung. Geometry and dynamics of integrable systems. *Advanced courses in mathematics, CRM Barcelona*, 2016.
- [Bol91] A. V. Bolsinov. Methods of calculation of the Fomenko-Zieschang invariant. In *Topological classification of integrable systems*, volume 6 of *Adv. Soviet Math.*, pages 147–183. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [Bou15] D. Bouloc. Singular fibers of the bending flows on the moduli space of 3d polygons. *arXiv :1505.04748*, 2015. À paraître dans *Journal of Symplectic Geometry*.

- [Bou16] D. Bouloc. Some remarks on the topology of hyperbolic actions of \mathbb{R}^n on n -manifolds. *arXiv :1606.05602*, 2016.
- [BRGD84] T.C. Bountis, A. Ramani, B. Grammaticos, and B. Dorizzi. On the complete and partial integrability of non-Hamiltonian systems. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 128(1-2) :268–288, 1984.
- [CB15] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global aspects of classical integrable systems*. Birkhäuser/Springer, Basel, second edition, 2015.
- [CD01] R. Cushman and J.J. Duistermaat. Non-Hamiltonian monodromy. *Journal of Differential Equations*, 172(1) :42–58, 2001.
- [CDS01] A. Cannas Da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Cha10] L. Charles. On the quantization of polygon spaces. *Asian J. Math.*, 14(1) :109–152, 2010.
- [Dar82] G. Darboux. Sur le probleme de Pfaff. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 6(1) :14–36, 1882.
- [dR84] G. de Rham. *Differentiable manifolds : forms, currents, harmonic forms*, volume 266 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- [Eli90] L. H. Eliasson. Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals—elliptic case. *Comment. Math. Helv.*, 65(1) :4–35, 1990.
- [FFL16] X. Fang, G. Fourier, and P. Littelmann. On toric degenerations of flag varieties. *arXiv :1609.01166*, 2016.
- [FH05] P. Foth and Y. Hu. Toric degenerations of weight varieties and applications. *Travaux mathématiques. Fasc. XVI*, 16 :87–105, 2005.
- [FJ06] Y. N. Fedorov and B. Jovanović. Quasi-Chaplygin systems and non-holonomic rigid body dynamics. *Letters in Mathematical Physics*, 76(2) :215–230, 2006.
- [FK14] A. T. Fomenko and A. Konyaev. Algebra and geometry through Hamiltonian systems. In *Continuous and Distributed Systems*, pages 3–21. Springer, 2014.

- [Fom91] A. T. Fomenko. Topological classification of all integrable Hamiltonian differential equations of general type with two degrees of freedom. In *The geometry of Hamiltonian systems (Berkeley, CA, 1989)*, volume 22 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 131–339. Springer, New York, 1991.
- [GS83a] V. Guillemin and S. Sternberg. The Gel’fand–Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds. *J. Funct. Anal.*, 52(1) :106–128, 1983.
- [GS83b] V. Guillemin and S. Sternberg. On collective complete integrability according to the method of Thimm. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(2) :219–230, 1983.
- [HK97] J.-C. Hausmann and A. Knutson. Polygon spaces and Grassmannians. *Enseign. Math. (2)*, 43(1-2) :173–198, 1997.
- [HK12] M. Harada and K. Kaveh. Integrable systems, toric degenerations and Okounkov bodies. *Inventiones mathematicae*, pages 1–59, 2012.
- [HMM11] B. Howard, C. Manon, and J. Millson. The toric geometry of triangulated polygons in Euclidean space. *Canad. J. Math.*, 63(4) :878–937, 2011.
- [Izo16] A. Izosimov. Singularities of integrable systems and algebraic curves. *International Mathematics Research Notices*, 2016.
- [Kav16] K. Kaveh. Toric degenerations and symplectic geometry of projective varieties. *arXiv* :1508.00316, 2016.
- [KM96] M. Kapovich and J. J. Millson. The symplectic geometry of polygons in Euclidean space. *J. Differential Geom.*, 44(3) :479–513, 1996.
- [KY02] Y. Kamiyama and T. Yoshida. Symplectic toric space associated to triangle inequalities. *Geometriae Dedicata*, 93(1) :25–36, 2002.
- [Lan15] J. Lane. Convexity and Thimm’s Trick. *ArXiv e-prints*, September 2015.
- [Lio55] J. Liouville. Note sur l’intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au bureau des longitudes le 29 juin 1853. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, pages 137–138, 1855.

- [LU98] L. M. Lerman and Ya. L. Umanskiy. *Four-dimensional integrable Hamiltonian systems with simple singular points (topological aspects)*, volume 176 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Traduit depuis le russe par A. Kononenko et A. Semenovitch.
- [Mil63] J. W. Milnor. *Morse theory*. Princeton university press, 1963.
- [Min35] H. Mineur. Sur les systèmes mécaniques admettant n intégrales premières uniformes et l'extension à ces systèmes de la méthode de quantification de Sommerfeld. *CR Acad. Sci., Paris*, 200 :1571–1573, 1935.
- [Min36] H. Mineur. Réduction des systèmes mécaniques à n degrés de liberté admettant n intégrales premières uniformes en involution aux systèmes à variables séparées. *J. Math. Pure Appl*, 15 :221–267, 1936.
- [Min37] H. Mineur. Sur les systèmes mécaniques dans lesquels figurent des paramètres fonctions du temps. Étude des systèmes admettant n intégrales premières uniformes en involution. Extension à ces systèmes des conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld. *J. Ecole Polytechn*, pages 173–191, 1937.
- [MW74] J. Marsden and A. Weinstein. Reduction of symplectic manifolds with symmetry. *Rep. Mathematical Phys.*, 5(1) :121–130, 1974.
- [MZ04] E. Miranda and N. T. Zung. Equivariant normal form for nondegenerate singular orbits of integrable Hamiltonian systems. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6) :819–839, 2004.
- [NNU10] T. Nishinou, Y. Nohara, and K. Ueda. Toric degenerations of Gelfand–Cetlin systems and potential functions. *Advances in Mathematics*, 224(2) :648–706, 2010.
- [NU14] Y. Nohara and K. Ueda. Toric degenerations of integrable systems on grassmannians and polygon spaces. *Nagoya Mathematical Journal*, 214 :125–168, 2014.
- [Pfl01] M. J. Pflaum. *Analytic and geometric study of stratified spaces*, volume 1768 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [Pfl03] M. J. Pflaum. On the deformation quantization of symplectic orbispaces. *Differential Geometry and its Applications*, 19(3) :343–368, 2003.

- [PVN14] A. Pelayo and S. Vu Ngoc. Semiclassical inverse spectral theory for singularities of focus–focus type. *Communications in Mathematical Physics*, 329(2) :809–820, 2014.
- [S⁺60] S. Smale et al. Morse inequalities for a dynamical system. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 66(1) :43–49, 1960.
- [Sto00] L. Stolovitch. Singular complete integrability. *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques*, 91(1) :133–210, 2000.
- [Thi81] A. Thimm. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces. *Ergodic theory and dynamical systems*, 1(04) :495–517, 1981.
- [Vey78] J. Vey. Sur certains systèmes dynamiques séparables. *Amer. J. Math.*, 100(3) :591–614, 1978.
- [Wei71] A. Weinstein. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds. *Advances in mathematics*, 6(3) :329–346, 1971.
- [ZM14] N. T. Zung and N. V. Minh. Geometry of nondegenerate \mathbb{R}^n -actions on n -manifolds. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 66(3) :839–894, 2014.
- [Zun96] N. T. Zung. Symplectic topology of integrable Hamiltonian systems, I : Arnold-Liouville with singularities. *Compositio Mathematica*, 101 :179–215, 1996.

Géométrie et topologie de systèmes dynamiques intégrables

Résumé : Dans cette thèse, on s'intéresse à deux aspects différents des systèmes dynamiques intégrables.

La première partie est dédiée à l'étude de trois familles de systèmes hamiltoniens intégrables : les systèmes de pliage de Kapovich et Millson sur les espaces de modules de polygones 3D de longueurs de côtés fixées, les systèmes de Gelfand–Cetlin introduits par Guillemin et Sternberg sur les orbites coadjointes du groupe de Lie $U(n)$, et une famille de systèmes définie par Nohara et Ueda sur la variété grassmannienne $Gr(2, n)$. Dans chaque cas on montre que les fibres singulières de l'application moment sont des sous-variétés plongées et on en donne des modèles géométriques sous la forme de variétés quotients.

La deuxième partie poursuit une étude initiée par Zung et Minh sur les actions totalement hyperboliques de \mathbb{R}^n sur des variétés compactes de dimension n , qui apparaissent naturellement lors de l'étude des systèmes non-hamiltoniens intégrables dont toutes les singularités sont non-dégénérées. On s'intéresse au flot engendré par l'action d'un vecteur générique de \mathbb{R}^n . On donne une définition d'indice pour ses singularités qu'on relie à la théorie de Morse classique, et on utilise ce flot pour obtenir des résultats sur le nombre d'orbites de dimension donnée. Une étude plus poussée est effectuée en dimension 2, et en particulier sur la sphère S^2 , où les orbites de l'action dessinent un graphe plongé dont on analyse la combinatoire. On termine en construisant explicitement des exemples d'actions hyperboliques en dimension 3 sur la sphère S^3 et dans l'espace projectif \mathbb{RP}^3 .

Geometry and topology of integrable dynamical systems

Abstract: In this thesis, we are interested in two different aspects of integrable dynamical systems.

The first part is devoted to the study of three families of integrable Hamiltonian systems: the systems of bending flows of Kapovich and Millson on the moduli spaces of 3D polygons with fixed side lengths, the Gelfand–Cetlin systems introduced by Guillemin and Sternberg on the coadjoint orbits of the Lie group $U(n)$, and a family of integrable systems defined by Nohara and Ueda on the Grassmannian $Gr(2, n)$. In each case we prove that the fibers of the momentum map are embedded submanifolds for which we give geometric models in terms of quotients manifolds.

In the second part we carry on with a study initiated by Zung and Minh of the totally hyperbolic actions of \mathbb{R}^n on compact n -dimensional manifolds that appear naturally when investigating integrable non-hamiltonian systems with nondegenerate singularities. We study the flow generated by the action of a generic vector in \mathbb{R}^n . We define a notion of index for its singularities and we use this flow to obtain results on the number of orbits of given dimension. We investigate further the 2-dimensional case, and more particularly the case of the sphere S^2 , where the orbits of the action draw an embedded graph of which we analyse the combinatorics. Finally, we provide explicit examples of totally hyperbolic actions in dimension 3, on the sphere S^3 and on the projective space \mathbb{RP}^3 .